សាលាបង្រៀនគួរស្ទីម

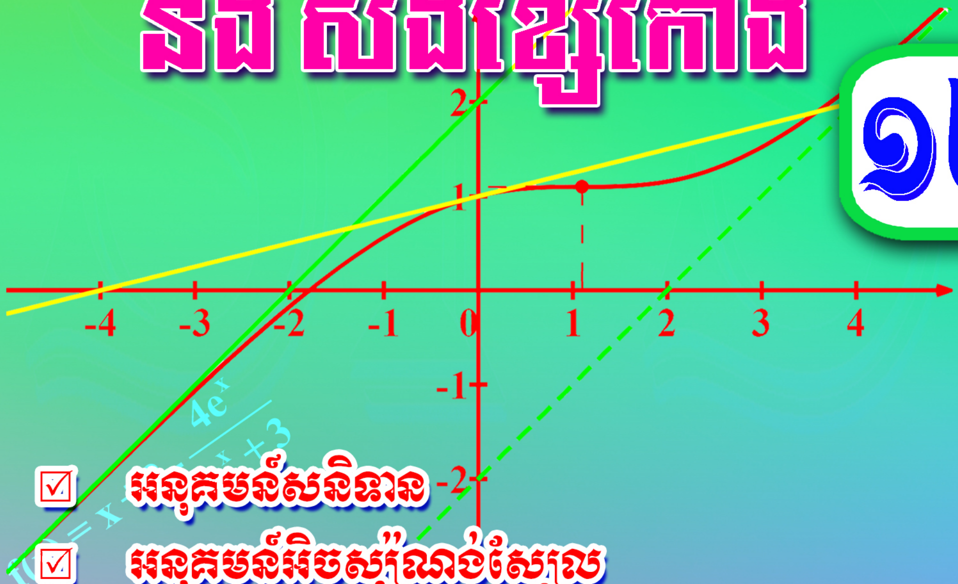
STEAM Tuition Center

ទំនុកចិត្ត សមត្ថភាព សុជីវធម៌

សិក្សាអនុគមន៍

និង សង់ខ្សែកោង

១២



- ☑ អនុគមន៍សនិទាន
- ☑ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
- ☑ អនុគមន៍លោការីត
- ☑ លំហាត់ជ្រើសរើសផ្សេងៗ និងដំណោះស្រាយ

រៀបរៀងដោយលោកគ្រូ សុខ ពិសិដ្ឋ

អសយដ្ឋាន : ផ្ទះលេខ១២ ផ្លូវលេខ១ បុរីប៉េងហួត ដីស្ដាឡែត៍ សង្កាត់ភ្នំពេញថ្មី ខណ្ឌសែនសុខ រាជធានីភ្នំពេញ

(ទល់មុខកីឡដ្ឋានវេស្ទើន) (012/010/0884) 47 36 96 STEAM Tuition Center

មេរៀនទី

១ អនុគមន៍សនិទាន

ប្លង់សិក្សាអនុគមន៍ y = f(x)

①. ដែនកំណត់

②. ទិសដៅអថេរភាព

- គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រកឫសនៃសមីការ $f'(x)=0$ (បើមានឫស)
- សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$
- រកតម្លៃបរមាធៀប (បើមាន)
- រកលីមីតចុងដែនកំណត់ - រកសមីការអាស៊ីមតូត
- តារាងអថេរភាព

③. ក្រាប

- រកចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង និងអ័ក្សកូអរដោនេ ឬ តារាងជំនួយ
- ចំណុចប្រសព្វរាងអាស៊ីមតូតដេក និង ខ្សែកោង (បើមាន)
- ចំណុចរបត់ (បើមាន)
- ផ្ចិតឆ្លុះ(បើមាន)

១. អាស៊ីមតូត

១.១. អាស៊ីមតូតឈរ

បន្ទាត់មានសមីការ $x=a$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោង តាងអនុគមន៍ f កាលណា $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ ឬ $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$

លំហាត់គំរូ : រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+2}{x+2}$ ខ. $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-4x-4}{x-2}$ ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+2}{x+2}$

អនុគមន៍ f កំណត់បានកាលណា $x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$

ដោយ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-x^2+2x+2}{x+2}=\pm\infty$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f

ខ. $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

អនុគមន៍កំណត់បានកាលណា $e^x-1\neq 0 \Leftrightarrow e^x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=\pm\infty$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-4x-4}{x-2}$

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x-4}{x-2}=\pm\infty$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}$

អនុគមន៍ f កំណត់បានកាលណា $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0\neq\infty$

ដូច្នេះ ខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ f គ្មានអាស៊ីមតូតឈរទេ

១.២. អាស៊ីមតូតដេក

បន្ទាត់មានសមីការ $y=b$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃខ្សែកោង តាងអនុគមន៍ f កាលណា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ ឬ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$

លំហាត់គំរូ : រកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+1}$ ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

គ. $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-\ell nx}{x^2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+1}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=3$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f

គ. $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$

និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x(1+e^{-x})}{e^x(1-e^{-x})}=\dfrac{1+0}{1-0}=1$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=-1$ និង $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ខាង $-\infty$ និងខាង $+\infty$ រៀងគ្នា។

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-\ell nx}{x^2}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-\ell nx}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ell nx}{x^2}\right)=1-0=1$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f

១.៣. អាស៊ីមតូតទ្រេត

បន្ទាត់មានសមីការ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f កាលណា $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ ។

❖ របៀបរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត

របៀបទី១ : បើ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f

របៀបទី២ : បើ $f(x)$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $f(x)=ax+b+\varepsilon(x)$ ហើយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x)=0$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $y=ax+b$ អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f ។

លំហាត់គំរូ : រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ ខ. $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$

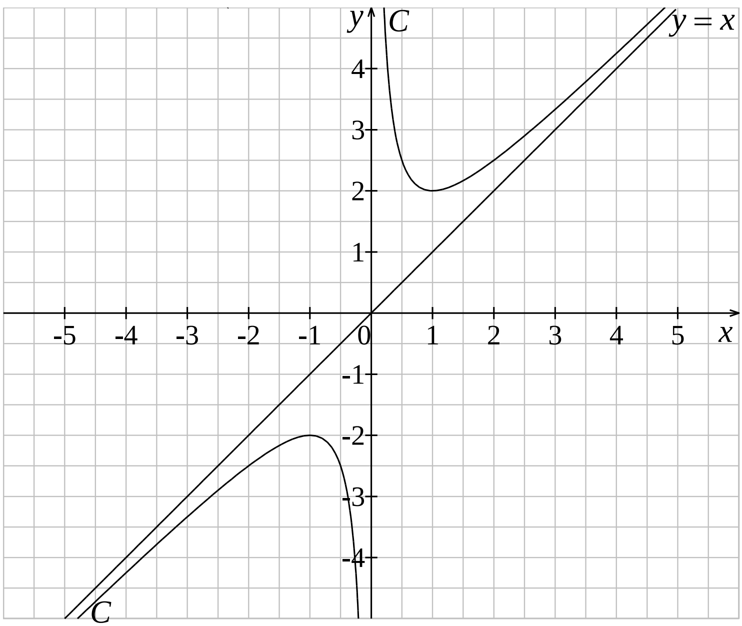
គ. $f(x)=\sqrt{x^2+4x+7}$ ឃ. $f(x)=-x-2+\dfrac{4e^x}{e^x+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{x^2}{x}+\dfrac{1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$

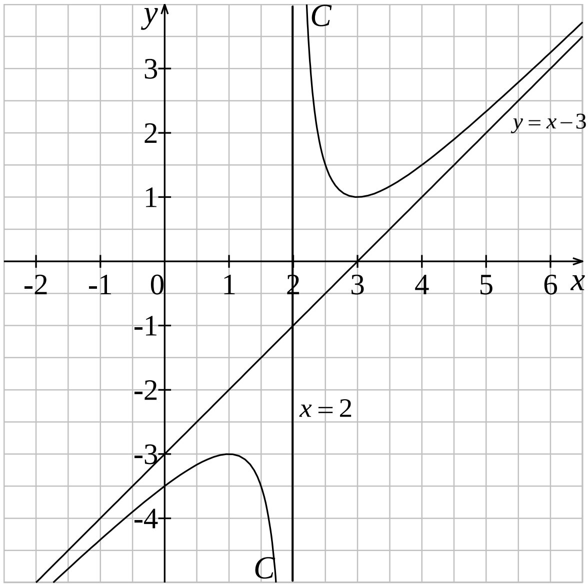
ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f



ខ. យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}=\dfrac{x^2-2x-3x+6+1}{x-2}=x-3+\dfrac{1}{x-2}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f



សម្គាល់: បើ $f(x)=\sqrt{ax^2\pm bx+c}$

យើងសរសេរ $f(x)$ ទៅជា:

$$f(x)=\sqrt{a\left[x^2\pm\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]}$$

$$=\sqrt{a\left[\left(x\pm\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\right]}$$

$$=\sqrt{a}\left|x\pm\frac{b}{a}\right|\sqrt{1+\varepsilon(x)}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon(x)=0$

នោះបន្ទាត់មានសមីការ $y=\sqrt{a}\left|x\pm\frac{b}{a}\right|$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f

គ. $f(x)=\sqrt{x^2+4x+7}$

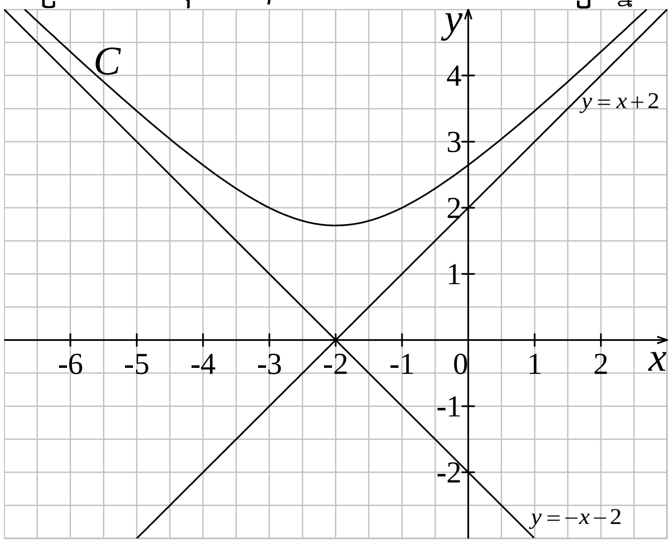
$$=\sqrt{x^2+4x+4+3}$$

$$=\sqrt{(x+2)^2\left(1+\frac{3}{(x+2)^2}\right)}$$

$$=|x+2|\sqrt{1+\frac{3}{(x+2)^2}}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{3}{(x+2)^2}\right]=0$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{(x+2)^2}\right]=0$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=-x-2$ និង $y=x+2$ ជាអាសុីមតូតទ្រេត នៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ខាង $-\infty$ និងខាង $+\infty$ រៀងគ្នា



ឃ. $f(x)=-x-2+\frac{4e^x}{e^x+1}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{e^x+1}=\frac{4\cdot 0}{0+1}=0$

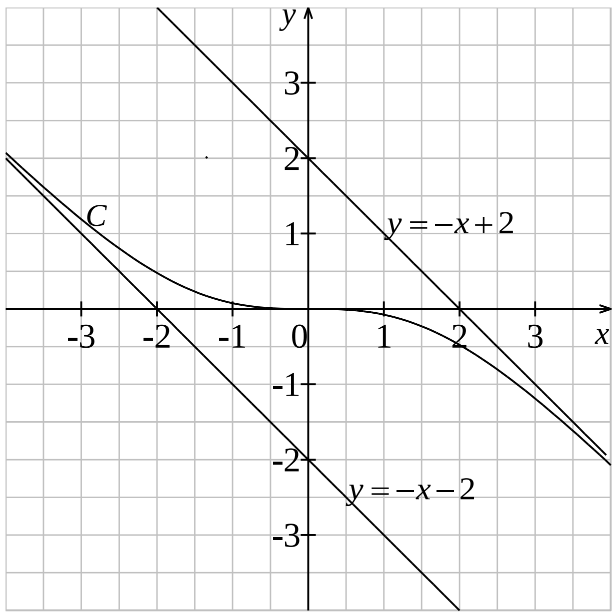
ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=-x-2$ ជាអាសុីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាង អនុគមន៍ f ខាង $-\infty$

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=-x-2+\dfrac{4(e^x+1)-4}{e^x+1}=-x+2-\dfrac{4}{e^x+1}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{4}{e^x+1}\right)=0$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=-x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាង

អនុគមន៍ f ខាង $+\infty$



២ សិក្សាអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$

①. ដែនកំណត់ :

អនុគមន៍មានន័យកាលណា $px+q\neq 0 \iff x\neq -\dfrac{q}{p}$

ដូចនេះ $D=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{q}{p}\right\}$ ឬ $D=(-\infty,-\dfrac{q}{p})\cup(-\dfrac{q}{p},+\infty)$

②. ទិសដៅអថេរភាព

- គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចដោះស្រាយ $f'(x)=0$ ចំពោះ $x\in D$
- សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ រួច រកតម្លៃបរមាធៀប (បើមាន) :
  - ❖ បើ $f'(x)=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នានោះ អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបមួយ និង អប្បបរមាធៀបមួយ។
  - ❖ បើ $f'(x)=0$ មានឫសឌុប នោះ អនុគមន៍គ្មានបរមាធៀបទេ
  - ❖ បើ $f'(x)=0$ គ្មានឫស នោះ អនុគមន៍គ្មានបរមាធៀបទេ

NOTE : បើ $x=x_0$ ជាតម្លៃដែល f មានបរមាធៀបនោះ

$$f(x_0)=\left.\frac{(ax^2+bx+c)'}{(px+q)'}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{2ax+b}{p}\right|_{x=x_0}=\frac{2ax_0+b}{p}$$

- រកលីមីតចុងសងខាងដែនកំណត់ គឺ៖
  - ❖ $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{q}{p}}\frac{ax^2+bx+c}{px+q}=\infty$
  - ❖ $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty}\frac{ax^2+bx+c}{px+q}=\infty$
- រកសមីការអាស៊ីមតូត
  - ❖ ដោយ $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{q}{p}}\frac{ax^2+bx+c}{px+q}=\infty$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ

    $x=-\dfrac{q}{p}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f
  - ❖ ម្យ៉ាងទៀត សរសេរ $f(x)$ ជាទម្រង់កាណូនិច៖

$$y=f(x)=Ax+B+\frac{C}{px+q}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(Ax+B)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{C}{px+q}\right)=0$

នោះបន្ទាត់មានសមីការ $y=Ax+B$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោងតាង អនុគមន៍ f

- ➢ សង់តារាងអថេរភាព

③. សង់ក្រាប

- ❖ រកចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង និងអ័ក្សកូអរដោនេ ឬ តារាងជំនួយ
- ❖ ផ្ចិតឆ្លុះ : អាស៊ីមតូតឈរ $x=-\dfrac{q}{p}$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=Ax+B$

កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $I\left(-\dfrac{q}{p}\,,\,-\dfrac{A\cdot q}{p}+B\right)$ នោះ ចំណុច I ជា

ផ្ចិតឆ្លុះ

☞ ដើម្បីស្រាយថា $I(a,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ ត្រូវស្រាយថា $f(2a-x)+f(x)=2b$

ឬ ប្រើរូបមន្ត**បំប្លែងកិលអ័ក្ស** $\begin{cases}x=a+X\\y=b+Y\end{cases}$ ជួសក្នុងអនុគមន៍ $y=f(x)$

យើងបាន $b+Y=f(b+X)$

$$Y=f(b+X)+b$$

តាង $Y=F(X)$

ចំពោះ $\forall x\in D\,,-x\in D$ បើ $F(-X)=-F(X)$ នោះ F ជាអនុគមន៍សេស

ដូច្នេះ $I(a,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ។

លំហាត់គំរូ : សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y=f(x)=\dfrac{x^2-x+9}{x-1}$ ខ. $y=f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y=f(x)=\dfrac{x^2-x+9}{x-1}$

❖ ដែនកំណត់

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $x-1\neq 0$ ឬ $x\neq 1$

ដូច្នេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{1\}}$

❖ ទិសដៅអថេរភាព

យើងមាន $y=f(x)=\dfrac{x^2-x+9}{x-1}=x+\dfrac{9}{x-1}$

+ ដេរីវេទី១ : $f'(x)=1-\dfrac{9}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2-9}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$

ដោយ $(x-1)^2>0$ ចំពោះ $\forall x\in D$ នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាម x^2-2x-8

បើ $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x-8=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-4)=0\Leftrightarrow x=-2, x=4$

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

➢ ត្រង់ $x=-2$ នោះ $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=-2$

តម្លៃអតិបរមា $f(-2)=\dfrac{(-2)^2-(-2)+9}{-2-1}=\dfrac{4+2+9}{-3}=-5$

➢ ត្រង់ $x=4$ នោះ $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=4$

តម្លៃអប្បបរមា $f(4)=\dfrac{4^2-4+9}{4-1}=\dfrac{16+5}{3}=7$

+ លីមីត និង អាស៊ីមតូត

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\dfrac{9}{x-1})=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\dfrac{9}{x-1})=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x+\dfrac{9}{x-1})=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x+\dfrac{9}{x-1}\right)=+\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\pm\infty$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f

ម្យ៉ាងទៀត ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{9}{x-1}\right)=0$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f

+ តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

❖ សំណង់ក្រាប

+ ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងអ័ក្ស $y'Oy$

$$x=0\Rightarrow y=-9$$

+ ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងអ័ក្ស $x'ox$

- $y'=0\Leftrightarrow x^2-x+9=0$

$\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot9=-35<0$ នោះសមីការគ្មានឫស

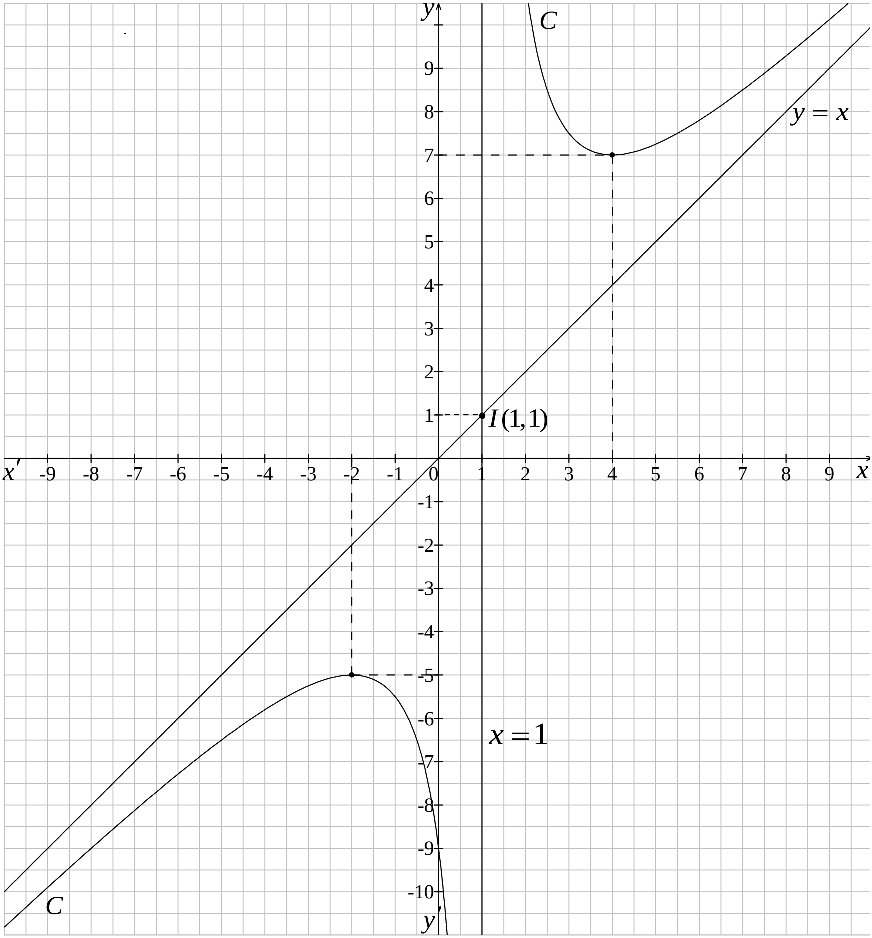
នោះខ្សែកោងគ្មានចំណុចប្រសព្វអ័ក្ស $x'ox$ ទេ

+ ផ្ចិតឆ្លុះ : អាស៊ីមតូតទាំងពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់ $I(1;1)$

តាមរូបមន្ត $f(2a-x)+f(x)=2b$

យើងបាន $f(2-x)+f(x)=2\Leftrightarrow 2-x+\dfrac{9}{-x+1}+x+\dfrac{9}{x-1}=2$

$\Rightarrow f(2\cdot1-x)+f(x)=2\cdot1$ នោះបញ្ជាក់ថា $I(1;1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ។



ខ $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$

❖ ដែនកំណត់

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $x - 1 \neq 0$ ឬ $x \neq 1$

ដូច្នេះ $\boxed{D = \mathbb{R} - \{1\}}$

❖ ទិសដៅអថេរភាព

យើងមាន $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x-1} = x - \dfrac{2}{x-1}$

+ ដេរីវេទី១

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x-2)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x+2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$$

ដោយ $(x-1)^2 > 0$ ចំពោះ $\forall x \in D$ ហើយ $x^2-2x+3>0$

ចំពោះគ្រប់ $x \in D$

បើ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-2x+3=0$ សមីការគ្មានឬស

នោះ យើងបាន $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច។

+ លីមីតនិងអាស៊ីមតូត

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x - \dfrac{2}{x-1}) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x - \dfrac{2}{x-1}) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(x - \dfrac{2}{x-1}) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}(x - \dfrac{2}{x-1}) = -\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \pm\infty$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោងតាង អនុគមន៍ f

ម្យ៉ាងទៀត ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\dfrac{-2}{x-1}) = 0$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង តាងអនុគមន៍ f

+ តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$			$\|$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \; \| \; -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

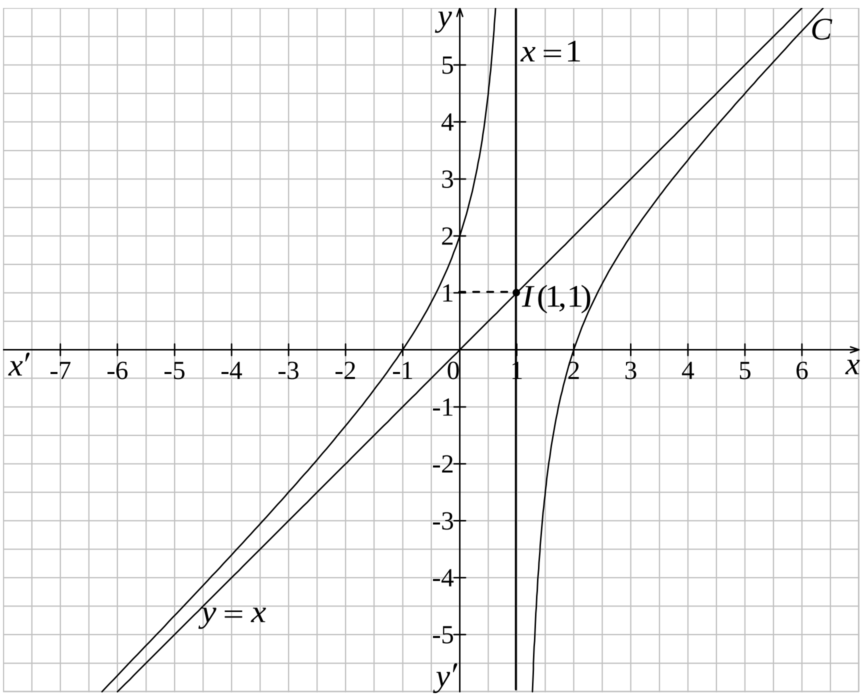
❖ សំណង់ក្រាប

+ ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង និង អ័ក្ស $y'Oy$

$$x=0\Rightarrow y=2 \quad y=2$$

+ ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងអ័ក្ស $x'Ox$

$$y=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow x_1=-1, x_2=2$$



\+ ផ្ចិតឆ្លុះ : អាស៊ីមតូតទាំងពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់ $I(1,1)$ នោះ $I(1,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ

តាមរូបមន្ត $f(2a-x)+f(x)=2b$

យើងបាន $f(2-x)+f(x)=2 \Leftrightarrow 2-x-\dfrac{2}{-x+1}+x-\dfrac{2}{x-1}=2$

$\Rightarrow f(2\cdot 1-x)+f(x)=2\cdot 1$ នោះបញ្ជាក់ថា $I(1;1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ

លំហាត់អនុវត្តន៍ : សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ ខ. $y=f(x)=\dfrac{-x^2+4x-4}{x-1}$

គ. $y=f(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{x-1}$

៣. អនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

①. ដែនកំណត់

អនុគមន៍កំណត់បានកាលណា $px^2+qx+r\neq 0$

②. ទិសដៅអថេរភាព

- ❖ គណនាដេរីវេ y' នៃអនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$
- ❖ ដោះស្រាយ $y'=0$
- ❖ សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ y' និង រកតម្លៃបរមាធៀប (បើមាន)
- ❖ រកលីមីតចុងដែនកំណត់
- ❖ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ (បើមាន) និងអាស៊ីមតូតដេក
  - ➯ អាស៊ីមតូតដេកមានចំនួនមួយគឺ $y=\dfrac{a}{p}$
  - ➯ សមីការអាស៊ីមតូតឈរ(បើមាន)អាស្រ័យនឹង px^2+qx+r
  - ➯ បើ $px^2+qx+r=0$ មានឫសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា α និង β នោះអាស៊ីមតូតឈរមានពីរគឺ $x=\alpha$ និង $x=\beta$

- បើ $px^2+qx+r=0$ មានឫសឌុប x_0 នោះអាស៊ីមតូតឈរមានតែមួយគត់គឺ $x=x_0$
- បើ $px^2+qx+r=0$ គ្មានឫសជាចំនួនពិត នោះ អនុគមន៍គ្មានអាស៊ីមតូតឈរទេ ។

❖ តារាងអថេរភាព

③. សង់ក្រាប

❖ រកចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង និងអ័ក្សកូអរដោនេ ឬ តារាងជំនួយ

❖ រកចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង និងអាស៊ីមតូតដេក

លំហាត់គំរូ : សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $f(x)=\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}$ ខ. $f(x)=\dfrac{6x^2+x+7}{x^2-15x+20}$ គ. $f(x)=\dfrac{x^2-9x+14}{x^2-15x+50}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}$

+ **ដែនកំណត់**

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $x^2+3x+2\neq 0$

$$\Leftrightarrow x\neq -1\ ,\ x\neq -2$$

ដូច្នេះ អនុគមន៍មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{-1,-2\}$

+ **ទិសដៅអថេរភាព**

- ដេរីវេទី១

$$f'(x)=\frac{(-2x-2)(x^2+3x+2)-(2x+3)(-x^2-2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}$$

$$=\frac{-2x^3-6x^2-4x-2x^2-6x-4+2x^3+4x^2-6x+3x^2+6x-9}{(x^2+3x+2)^2}$$

$$= \frac{-x^2-10x-13}{(x^2+3x+2)^2}$$

បើ $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-10-13=0$

$$\Delta' = (-5)^2-(-1)(-13)=12$$

$$x_1=-5-2\sqrt{3}, x_2=-5+2\sqrt{3}$$

x	$-\infty$		$-5-2\sqrt{3}$		-2		$-5+2\sqrt{3}$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	

\+ ចំណុចបរមា

❖ ត្រង់ $x=-5-2\sqrt{3}$ នោះ $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ នោះ អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=-5-2\sqrt{3}$

តម្លៃអប្បបរមា $f(-5-2\sqrt{3}) = \left.\frac{-2x-2}{2x+3}\right|_{x=-5-2\sqrt{3}}$

$$= \frac{-2(-5-2\sqrt{3})-2}{2(-5-2\sqrt{3})+3} = -8+4\sqrt{3}$$

❖ ត្រង់ $x=-5+2\sqrt{3}$ នោះ $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ នោះ អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=-5+2\sqrt{3}$

តម្លៃអតិបរមា $f(-5+2\sqrt{3}) = \left.\frac{-2x-2}{2x+3}\right|_{x=-5+2\sqrt{3}}$

$$= \frac{-2(-5+2\sqrt{3})-2}{2(-5+2\sqrt{3})+3} = -8-4\sqrt{3}$$

\- លីមីត និងអាស៊ីមតូត

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2} = -1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2} = -1$
- $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2} = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2} = -\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = -1$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f

ដោយ $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \infty$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f

ដោយ $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \infty$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f

+ តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$-5-2\sqrt{3}$		-2		$-5+2\sqrt{3}$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-8+4\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	$-8-4\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	-1

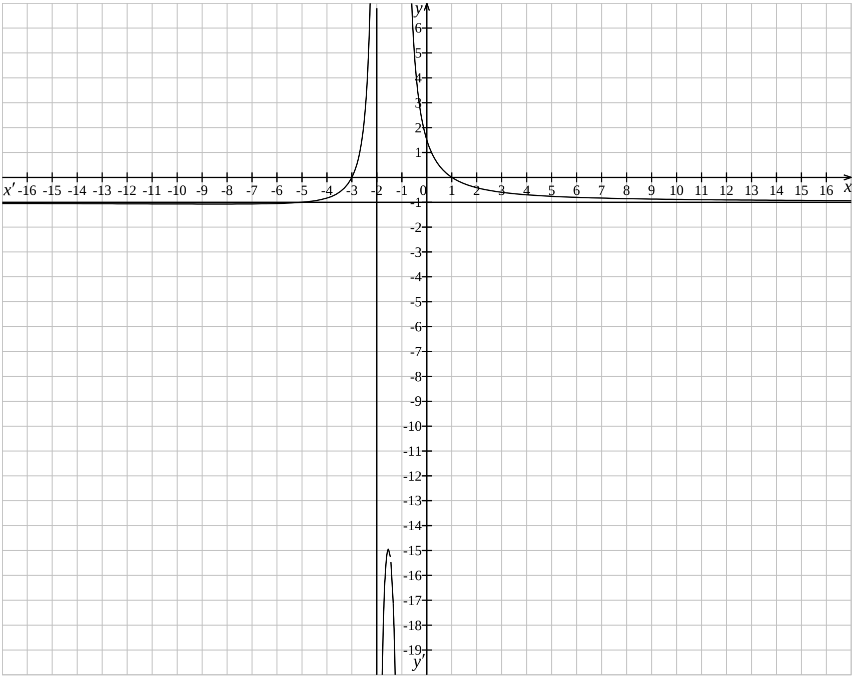
+ **សង់ក្រាប**

- ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងអ័ក្ស $y'oy \Leftrightarrow x=0$ នោះ $y=\dfrac{3}{2}$
- ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងអ័ក្ស $x'ox \Leftrightarrow y=0$

$$\Leftrightarrow -x^2-2x+3=0$$

ដោយ $a+b+c=0$ នោះ $x_1=1$ និង $x_2=3$

នោះ $(1,0)$ និង $(3;0)$ ជាចំណុចប្រសព្វអ័ក្ស $x'ox$ និងខ្សែកោង



ខ. $y = \dfrac{6x^2 + x + 7}{x^2 - 15x + 20}$

+ **ដែនកំណត់**

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $x^2 - 15x + 20 \neq 0$

$$\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 145$$

$$x_{1,2} \neq \frac{15 \pm \sqrt{145}}{2}$$

ដូច្នេះ $D = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{15 - \sqrt{145}}{2} \approx 1.5 \ , \ \dfrac{15 + \sqrt{145}}{2} \approx 13.5 \right\}$

+ **ទិសដៅអថេរភាព**

- ដេរីវេ $f'(x) = \dfrac{(12x+1)(x^2-15x+20) - (2x-15)(6x^2+x+7)}{(x^2-15x+20)^2}$

$$= \frac{12x^3 - 180x^2 + 24x + x^2 + 5x + 2 - 12x^3 - 2x^2 - 14x + 90x^2 + 15x + 105}{(x^2 - 15x + 20)^2}$$

$$= \frac{-91x^2 + 226x + 125}{(x^2 - 15x + 20)^2}$$

បើ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -91x^2 + 226x + 125 = 0 \quad \Leftrightarrow x_1 = -0.46 \, , \, x_2 = 2.95$

x	$-\infty$		-0.46		1.5		2.95		13.5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	

- ចំណុចបរមា

❖ ត្រង់ $x = -0.46$ នោះ $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បមាធៀបត្រង់ $x = -0.46$

តម្លៃអប្បបរមាធៀប $f(0.46) = 0.29$

❖ ត្រង់ $x = 2.95$ នោះ $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិមាធៀបត្រង់ $x = 2.95$

តម្លៃអតិបរមាធៀប $f(2.95) = -4$

- លីមីត និងអាស៊ីមតូត

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{6x^2 + x + 7}{x^2 - 15x + 20} = 6$
- $\lim\limits_{x \to 1.5} f(x) = \lim\limits_{x \to 1.5} \dfrac{6x^2 + x + 7}{x^2 - 15x + 20} = \pm\infty$
- $\lim\limits_{x \to 13.5} f(x) = \lim\limits_{x \to 13.5} \dfrac{6x^2 + x + 7}{x^2 - 15x + 20} = \pm\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 6$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y = 6$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f

ដោយ $\lim\limits_{x \to 1.5} f(x) = \pm\infty$ និង $\lim\limits_{x \to 13.5} f(x) = \pm\infty$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $x = 1.5$ និង $x = 13.5$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f

+ តារាងអថេរភាព

	$-\infty$	-0.46	1.5	2.95	13.5	$+\infty$
		0	$\|\|$	0	$\|\|$	
	$6 \searrow$	0.29	$\nearrow +\infty \;\|\|\; -\infty \nearrow$	-4	$\searrow -\infty \;\|\|\; +\infty \searrow$	6

+ **សង់ក្រាប**

↳ ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងអ័ក្ស $y'oy$

- $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{7}{20}$

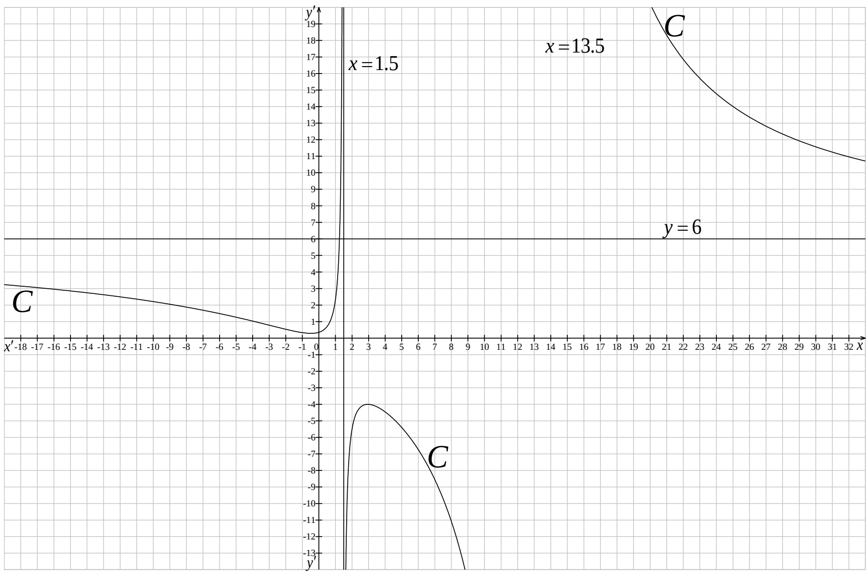
↳ ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងអ័ក្ស $x'ox$

- $y=0 \Leftrightarrow 6x^2+x+7=0$

$\Delta=1^2-4\cdot 6\cdot 7=-167<0 \;\Rightarrow$ សមីការគ្មានឬស

នោះ ខ្សែកោងមិនកាត់អ័ក្ស $x'ox$ ទេ

ក្រាប



គ. $y=\dfrac{x^2-9x+14}{x^2-15x+50}$

+ **ដែនកំណត់**

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $x^2-15x+50\neq 0$

$$\Leftrightarrow x\neq 5\,,\,x\neq 10$$

ដូច្នេះ $D=\mathbb{R}-\{5,10\}$

+ **ទិសដៅអថេរភាព**

- ដេរីវេទី១

$$f'(x)=\frac{(2x-9)(x^2-15x+50)-(2x-15)(x^2-9x+14)}{(x^2-15x+50)^2}$$

$$=\frac{12x^3-30x^2+100x-9x^2+135x+450-2x^3+18x^2-28x+15x^2-135x+210}{(x^2-15x+50)^2}$$

$$=\frac{-6x^2+72x-240}{(x^2-15x+50)^2}$$

➪ បើ $f'(x)=0\Leftrightarrow -6x^2+72x+240=0$ យើងបាន $\Delta<0$

នោះសមីការគ្មានឫស

ដោយ $a=-6<0\Rightarrow f'(x)<0\ ,\forall x\in D$

នោះអនុគមន៍គ្មានចំណុចបរមាទេ

- លីមីត និងអាស៊ីមតូត

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-9x+14}{x^2-15x+50}=1$
- $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-9x+14}{x^2-15x+50}=\pm\infty$
- $\lim\limits_{x\to 10} f(x)=\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^2-9x+14}{x^2-15x+50}=\pm\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=1$ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f

ដោយ $\lim\limits_{x\to5} f(x)=\pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to10} f(x)=\pm\infty$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $x=5$ និង $x=10$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប តាងអនុគមន៍ f

+ តារាងអរថេភាព

	$-\infty$		5		10	$+\infty$
			‖		‖	
	$+\infty \searrow$	$-\infty$	‖ $+\infty \searrow$	$-\infty$	‖ $+\infty \searrow$	$-\infty$

+ សង់ក្រាប

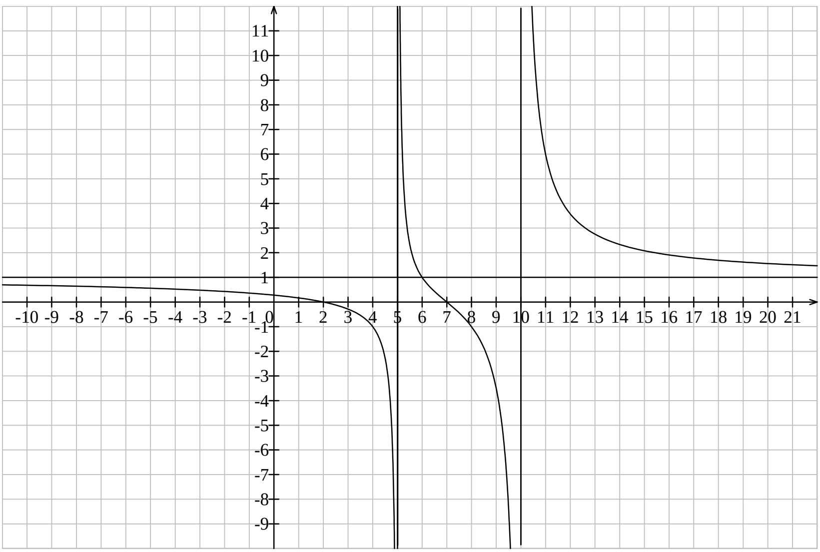
➮ ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងអ័ក្ស $y'Oy$: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{7}{25}$

➮ ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងអ័ក្ស $x'ox$:

- $y=0\Leftrightarrow x^2-9x+14=0$ សមីការមានឫស $x_1=2$ និង $x_2=7$

នោះចំណុចគឺ $(2,0)$ និង $(7,0)$

សំណង់ក្រាប



លំហាត់អនុវត្តន៍ : សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 2}$ ខ. $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$

៣. អនុវត្តន៍

លំហាត់គំរូទី១ : គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x}{2(x-1)}$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប C តាងអនុគមន៍ f ។

ខ. ដោយប្រើក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ចូរសិក្សាចំនួនឫសនៃសមីការ $x^2 + x = 2m(x-1)$ ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប C តាងអនុគមន៍ f

❖ ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $2(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

ដូច្នេះ $\boxed{D = \mathbb{R} - \{1\}}$

❖ ទិសដៅអថេរភាព

➢ ដេរីវេ $$f'(x) = \frac{(x^2+x)' \cdot 2(x-1) - 2(x-1)'(x^2+x)}{4(x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x+1)(2x-2) - 2(x^2+x)}{4(x-1)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x + 2x - 2 - 2x^2 - 2x}{4(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 2}{4(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 1}{2(x-1)^2}$$

ដោយ $2(x-1)^2 > 0, \forall x \in D$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(x^2 - 2x - 1)$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0$

$$\Delta'=(-1)^2-1\cdot(-1)=2$$

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

➪ ចំណុចបរមាធៀប

- ត្រង់ $x=1-\sqrt{2}$ នោះ $f'(x)=0$ ហើយប្ដូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ$(+)$ នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=1-\sqrt{2}$

តម្លៃអប្បបរមា $f(1-\sqrt{2})=\left.\dfrac{2x+1}{2}\right|_{x=1-\sqrt{2}}=\dfrac{2(1-\sqrt{2})+1}{2}=\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}$

- ត្រង់ $x=1+\sqrt{2}$ នោះ $f'(x)=0$ ហើយប្ដូរសញ្ញាពី$(+)$ ទៅ$(-)$ នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=1-\sqrt{2}$

តម្លៃអតិបរមា $f(1+\sqrt{2})=\left.\dfrac{2x+1}{2}\right|_{x=1-\sqrt{2}}=\dfrac{2(1+\sqrt{2})+1}{2}=\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$

➪ លីមីត និង អាស៊ីមតូត

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+x}{2(x-1)}=\pm\infty$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+x}{2(x-1)}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+x}{2(x-1)}=+\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{x^2+x}{2(x-1)}=\dfrac{x}{2}+1+\dfrac{1}{x-1}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\left(\dfrac{x}{2}+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=0$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=\dfrac{x}{2}+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

➥ តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}-\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

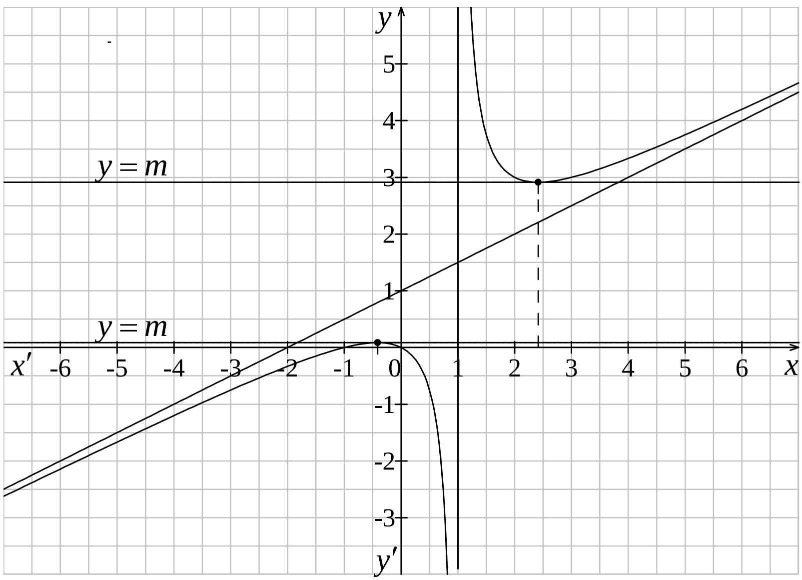
❖ សំណង់ក្រាប

➥ ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C ជាមួយនឹងអ័ក្ស $y'Oy$

- $x=0\Leftrightarrow y=0$

➥ ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C ជាមួយនឹងអ័ក្ស $x'Ox$

- $y=0\Leftrightarrow x^2+x=0\Leftrightarrow x=0\,,\,x=-1$



↳ ផ្ចិតឆ្លុះ : អាស៊ីមតូតឈរ $x=1$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=\frac{x}{2}+1$ ប្រសព្វគ្នា

ត្រង់ $I\left(1,\frac{3}{2}\right)$ នោះយើងនឹងស្រាយថា $I\left(1,\frac{3}{2}\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C

តាមរូបមន្តផ្ចិតឆ្លុះ $f(2a-x)+f(x)=2b$

យើងបាន $f(2a-x)+f(x)=f\left(2\cdot 1-x\right)+f(x)$

$$=\frac{2-x}{2}+1+\frac{1}{2-x-1}+\frac{x}{2}+1+\frac{1}{x-1}$$

$$=3=2\cdot\frac{3}{2}=2b$$

ដូច្នេះ $I\left(1,\frac{3}{2}\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C

ខ. ដោយប្រើក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ចូរសិក្សាចំនួនឫសនៃសមីការ

$x^2+x=2m(x-1)$ ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m

យើងមានសមីការ $x^2+x=2m(x-1)\Leftrightarrow \frac{x^2+x}{2(x-1)}=m \quad (E)$

នោះ (E) ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ដេក

ដែលមានសមីការ $d:y=m$

- បើ $m\in\left(-\infty,\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$ នោះបន្ទាត់ d កាត់ក្រាប C បាន ពីរ

  ចំណុចផ្សេងគ្នា ។ ដូច្នេះ សមីការ (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា។

- បើ $m=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ ឬ $m=\frac{3}{2}+\sqrt{2}$ នោះបន្ទាត់ d ប៉ះក្រាប C

  ដូច្នេះ សមីការ (E) មានឫសឌុប។

- បើ $m\in\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2},\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$ នោះបន្ទាត់ d មិនកាត់ក្រាប C

  ដូច្នេះ សមីការ (E) គ្មានឫស។

លំហាត់គំរូទី២ : គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x^2-7x+10}$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. សិក្សាអត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសនៃសមីការ $\dfrac{(x-3)^2}{x^2-7x+10}=m$

តាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f

❖ ដែនកំណត់

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x^2-7x+10\neq 0$

$$(x-2)(x-5)\neq 0$$

$$x\neq 2\,,\, x\neq 5$$

ដូច្នេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{2\,,5\}}$

❖ ទិសដៅអថេរភាព

➯ ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{\left[(x-3)^2\right]'(x^2-7x+10)-(x^2-7x+10)'(x-3)^2}{(x^2-7x+10)^2}$

$$=\frac{2(x-3)(x^2-7x+10)-(2x-7)(x-3)^2}{(x^2-7x+10)^2}$$

$$=\frac{(x-3)\left[2(x^2-7x+10)-(2x-7)(x-3)\right]}{(x^2-7x+10)^2}$$

$$=\frac{(x-3)(2x^2-14x+20-2x^2+6x+7x-21)}{(x^2-7x+10)^2}$$

$$=\frac{(x-3)(-x-1)}{(x^2-7x+10)^2}$$

ដោយ $(x^2-7x+10)^2>0\,,\forall x\in D$

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(x-3)(-x-1)$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-3)(-x-1)=0$

$\Leftrightarrow x=-1\,,\, x=3$

x	$-\infty$		-1		2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	

➢ ចំណុចបរមាធៀប

- ត្រង់ $x=-1$ នោះ $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ$(+)$

  នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=-1$

  តម្លៃអប្បបរមា $f(-1)=\dfrac{(-1-3)^2}{(-1)^2-7(-1)+10}=\dfrac{16}{18}=\dfrac{8}{9}$

- ត្រង់ $x=3$ នោះ $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$(+)$ ទៅ$(-)$

  នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=3$

  តម្លៃអតិបរមា $f(3)=\dfrac{(3-3)^2}{3^2-7(3)+10}=0$

➢ លីមីត និង អាស៊ីមតូត

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(x-3)^2}{x^2-7x+10}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-3)^2}{x^2-7x+10}=\pm\infty$
- $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-3)^2}{x^2-7x+10}=\pm\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=\pm\infty$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $x=2$ និង $x=5$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$

ដូច្នេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C

➭ តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{8}{9}$	↗ $+\infty$	|| $-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	|| $+\infty$	↘	1

❖ សំណង់ក្រាប

➭ ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C ជាមួយនឹងអ័ក្ស $y'Oy$

- $x=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{9}{10}=0.9$

➭ ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C ជាមួយនឹងអ័ក្ស $x'Ox$

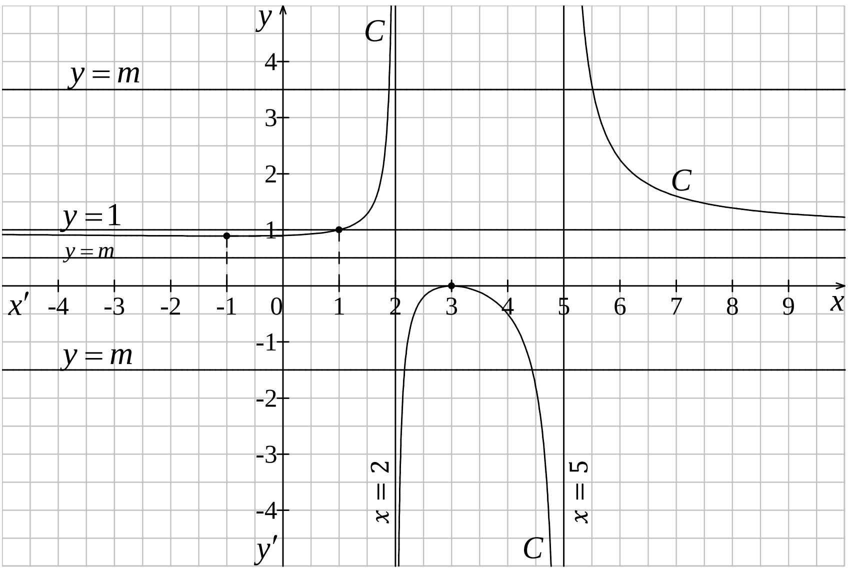
- $y=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=3$

➭ ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C ជាមួយនឹងអាស៊ីមតូតដេក

- $y=1 \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)^2}{x^2-7x+10}=1$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+9=x^2-7x+10$$

$$\Leftrightarrow x=1$$



ខ. សិក្សាអត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសនៃសមីការ $\frac{(x-3)^2}{x^2-7x+10}=m$ តាមតម្លៃ

ប៉ារ៉ាម៉ែត m

សមីការ $\frac{(x-3)^2}{x^2-7x+10}=m$ (1) ជាសមីការអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាង

បន្ទាត់ $d: y=m$ ជាមួយនឹងក្រាប $C: y=f(x)=\frac{(x-3)^2}{x^2-7x+10}$

តាមក្រាភិចខាងលើ យើងបាន៖

- បើ $m\in(-\infty,0)$ នោះ d កាត់ C បានពីរចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសជា

ចំនួនធំជាង 2 ។ ដូច្នេះ សមីការមានឫស $0<2<x_1<x_2$

- បើ $m=0$ នោះ d ប៉ះ C ។ ដូច្នេះ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=3>0$

-បើ $m\in\left(0,\frac{8}{9}\right)$ នោះ d មិនកាត់ C ។ ដូច្នេះ សមីការគ្មានឫស

- បើ $m=\frac{8}{9}$ នោះ d ប៉ះ C ។ ដូច្នេះ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=-1<0$

- បើ $m\in\left(\frac{8}{9},\frac{9}{10}\right)$ នោះ d កាត់ C បានពីរចំណុច។ ដូច្នេះ សមីការមានឫស

$x_1<x_2<0$ ។

- បើ $m\in\left[\frac{9}{10},1\right)$ នោះ d កាត់ C បានពីរចំណុច។ ដូច្នេះ សមីការមានឫស

$0\le x_1<x_2$ ។

- បើ $m=1$ នោះ d កាត់ C បានមួយចំណុច។ ដូច្នេះ សមីការមានឫស $x=1>0$

- បើ $m\in(1,+\infty)$ នោះ d កាត់ C បានពីរចំណុចផ្សេងគ្នា។ ដូច្នេះ សមីការ

មានឫសពីរផ្សេងគ្នា $0<x_1<x_2$ ។

លំហាត់

១. គេឱ្យ h ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $h(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 1$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឱ្យ $h(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$

ចំពោះ $x\neq 1$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ h ។

គ. រកផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ h ។

២. គេឱ្យ g ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $g(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$ មានក្រាប C ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឱ្យបាន $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$

ចំពោះ $x\neq 2$ ។

ខ. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង ទ្រេតនៃក្រាប C ។

គ. បង្ហាញថាចំណុច $I(2\,,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C ។

៣. គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ ដោយ $g(x)=\dfrac{4x-4}{x^2}$

មានក្រាប C ។

ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ រួចទាញ

រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C ។

ខ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ g ។

គ. បង្ហាញថាក្រាប C មានចំណុចរបត់មួយ រួចបញ្ជាក់កូអរដោនេ

នៃចំណុចរបត់នោះ។

ឃ. គណនា $g(-4),g(-2),g(1)$ និង $g(4)$ ។ សង់ខ្សែកោង C ។

៤. អនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x)=ax+a+\dfrac{b}{x+2}$ ចំពោះ $x\neq -2$ ហើយមានក្រាប H ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ g មានអប្បបរមា $g(0)=2$ ។

ខ. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប H ចំពោះតម្លៃ a និង b ក្នុងសំណួរ (ក) ។

៥. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+6x}{2(x^2-2x+2)}$ ។ C ជាខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ។

ក. បញ្ជាក់ថា f កំណត់បានចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ខ. គណនាលីមីតនៃ f កាលណា $x\to+\infty$ និង $x\to-\infty$ រួចទាញបញ្ជាក់ថាក្រាប C មានអាស៊ីមតូតមួយដោយបញ្ជាក់សមីការនៃអាស៊ីមតូតនោះ ។

គ. គណនា និង សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ ទាញថា f មានអតិបរមាធៀបមួយ និង អប្បបរមាធៀបមួយ រួចគណនាតម្លៃបរមាទាំងនោះ ។

ឃ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

ង. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង C និង អ័ក្សទាំងពីរនៃ តម្រុយ និង ចំណុចប្រសព្វរវាង ខ្សែកោង C និង អាស៊ីមតូតដេក ។

ច. គណនា $f(2)$ និង $f(3)$ ។ សង់ខ្សែកោង C ។

៦. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$ និងមានខ្សែកោង C ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ គណនា និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ បង្ហាញថា f មានអតិបរមាធៀបមួយ និង អប្បបរមាធៀបមួយ ហើយ គណនាតម្លៃបរមាទាំងនោះ ។

ខ. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង ទ្រេតនៃខ្សែកោង C ។

គ. សិក្សាទីតាំងរវាងអាស៊ីមតូតទ្រេត និង ខ្សែកោង C ។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និង សង់ខ្សែកោង C ។

៧. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{x-1}$ និងមានខ្សែកោង C ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ គណនា និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង ទ្រេតនៃខ្សែកោង C ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និង សង់ខ្សែកោង C ។

ឃ. ដោះស្រាយវិសមីការ $\dfrac{-x^2+2x+1}{x-1}>1-x$ ដោយប្រើខ្សែកោង C ។

៨. អនុគមន៍ f កំណត់ដោ $y=f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}$ និងមានខ្សែកោង C ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ រកសមីការអាស៊ីមតូឈរ និង អាស៊ីមតូតដេក នៃខ្សែកោង C ។

ខ. គណនា និងសិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ $f'(x)$ ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគន៍ f ។ សង់ខ្សែកោង C ។

ឃ. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ $(a-1)x^2+4ax+4a+1=0$ មានឫស x_1 , x_2 ដែល $-1\le x_1\le x_2\le 1$ ដោយប្រើខ្សែកោង C ។

៩. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\neq -2$ និងមានខ្សែកោង C ។

ក. គណនា $f'(x)$។ រកតម្លៃបរមានៃ f ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃ ខ្សែកោង C ។ គណនាលីមីតនៃ f កាលណា x ខិតទៅរក $+\infty, -\infty$។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង C ត្រង់ $x_0 = 1$។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ប៉ះ និង អស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C។

គ. សង់ខ្សែកោង C បន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោង C និងអាស៊ីមតូត ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់តែមួយ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌ ដោយខ្សែកោង C អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x = 1$, $x = 2$។

១០. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x}{2(x-1)^2}$ និងមានខ្សែកោង C។

ក. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង ដេកនៃខ្សែកោង C ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. រកសមីការនៃបន្ទាត់ L ដែលប៉ះខ្សែកោង C ត្រង់គល់កូអរដោនេ O។ សង់បន្ទាត់ L និង ខ្សែកោង C ។

ឃ. រកតម្លៃ k ដោយប្រើខ្សែកោង C ដើម្បីឱ្យសមីការ

$3x^2 - 4x - 2k(x-1)^2 = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ។

១១. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{-x^2 + 5x - 7}{x - 3}$ មានក្រាប C ។

ក. រកដែនកំណត់ D នៃ f ។ គណនា $f'(x)$ និងតម្លៃបរមានៃ f ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេត នៃ C ។

គណនា $\lim_{x \to \infty} f(x)$ និង $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ សង់អាស៊ីមតូតនៃ C និង ក្រាប C ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ។

១២. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2-2x}{x^2+2x+1}$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\neq -1$ និងមានក្រាប C ។

ក. រកតម្លៃ A,B និង C ដើម្បីបាន $f(x)=A+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$ ។

ខ. រកអាស៊ីមតូតដេក និងឈរនៃ C ។ គណនា និង សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. សង់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ត្រង់ $x=0$ ។ សង់ក្រាប C និង អាស៊ីមតូតនៃ C ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ។

១៣. អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\neq 1$ ដោយ $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$ និងមានក្រាប C ។

ក. រកចំនួនពិត a , b , c ដើម្បីឱ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ ចំពោះ គ្រប់ $x\neq 1$ ។

ខ. រកតម្លៃ អតិបរមា និង អប្បបរមានៃ f ។

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង ទ្រេតនៃក្រាប C ។ សិក្សាទីតាំងរវាងអាស៊ីមតូតទ្រេត និង ក្រាប C ។

ឃ. សង់តារាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និង សង់ក្រាប C ។

១៤. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ មានខ្សែកោង C ។

ក. រកដែនកំណត់ និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ។

ខ. សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C ។

គ. សង់តារាងអថេរភាព សង់អាស៊ីមតូត និង ខ្សែកោង C ។

១៥. អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x \neq 2$ ដោយ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{(x-2)^2}$

ហើយមានក្រាប C ។

ក. រក a , b , c ដោយដឹងថាក្រាប C កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x_1=1, x=-3$ និងមានអាស៊ីមតូតដេកជាបន្ទាត់ $y=1$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C និង សង់តារាងអថេរភាព នៃអនុគមន៍ f ដែលកំណត់បានក្នុងសំណួរទី ១ ។

គ. សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

១៦. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. រកដែនកំណត់ និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

គ. សង់តារាងអថេរភាព សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

១៧. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x \neq 2$ ដោយ $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$

ហើយមានក្រាប H ។

ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ។ បង្ហាញថា f គ្មានបរមាទេ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប H ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f និងក្រាប H ក្នុងតម្រុយ កូអរដោនេ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។ (គេយក $\sqrt{5}=2.2$)

១៨. អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x \neq -1$, $x \neq 1$ ដោយ $y=f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x^2-1}$

ហើយមានក្រាប C ។

ក. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតដេកនៃក្រាប C ។

ខ. គណនា $f(0), f(-3)$ និង $f'(0)$ ។ សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។ ទាញរកសំណុំឫសនៃវិសមីការ $\frac{x^2+3x}{x^2-1} \le 0$ ដោយប្រើក្រាប C ។

១៩. អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x \neq -2, x \neq 2$ ដោយ $f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$ និងមានក្រាប C ។

ក. គណនា $\lim_{x\to -2} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ និង $\lim_{x\to \pm\infty} f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីតូតដេកនៃក្រាប C ។

ខ. សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ $f'(x)$ និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. គណនា $f(-3)$ និង $f(3)$ ហើយសង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

២០. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{1-x}$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x) = -x-1+\frac{3}{x-1}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D_f$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

២១. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $I = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ដោយ $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$ ។

ក. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty, -2, 2$ និង $+\infty$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាង f ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. សង់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ក្រាបតាង f ។

២២. អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $y=f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$ និងមានក្រាប C ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក នៃក្រាប C ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាមួយ និង អតិបរមាមួយ។ គណនាតម្លៃបរមានោះ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. បង្ហាញថាក្រាប C មានផ្ចិតឆ្លុះមួយ។

ឃ. រកសមីការនៃបន្ទាត់ T ដែលប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ $O(0,0)$ ។ សង់ T និង C ។

ង. រកតំលៃ k ដោយប្រើខ្សែកោង C ដើម្បីអោយសមីការ $kx^2-4x+4k=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនវិជ្ជមាន។

២៣. គេអោយអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ ។ C ក្រាបនៃ f ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f រួចរកលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ចុងដែន កំណត់។

ខ. គណនាតម្លៃបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ f ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប C ។ បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស។ បញ្ជាក់ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C ។

ឃ. សង់ក្រាប C ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ង. ដោះស្រាយវិសមីការ $\dfrac{x^2+1}{x}>x$ តាមក្រាភិច។

២៤. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = x + \dfrac{4}{x-1}$ និងមានក្រាប C ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f រួចរកលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ចុងដែនកំណត់។

ខ. គណនា និងសិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ $f'(x)$។ បង្ហាញថា f មានអតិបរមាមួយ និងអប្បបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃបរមាទាំងនោះ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប C ។

ឃ. សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប C ធៀបធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត។

ង. សង់ក្រាប C ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ច. ពិភាក្សាតាមក្រាភិចនូវអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសនៃសមីការ $x^2 - (m+1)x + m + 4 = 0$, m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត។

២៥. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ និងមានក្រាប C ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ចុងដែនកំណត់។ ទាញរកអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប C ។

ខ. គណនា និងសិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ $f'(x)$។ បង្ហាញថាអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃអតិបរមានោះ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍គូ រួចបញ្ជាក់សមីការអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប C ។

ឃ. គណនា $f(-2)$ និង $f(2)$ ។ សង់ក្រាប C ។

ង. ប្រើក្រាភិច ចូរកំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការ $(a-1)x^2 = a$ គ្មានឫស។

២៦. A. ស្រាយបញ្ជាក់ថា អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោងតំណាងអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{mx^2+mx-2m-1}{x+2}$ កាត់តាមចំណុច នឹងមួយដែលត្រូវកំណត់កូអរដោនេចំពោះគ្រប់តម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m ។

B. (C) ជាខ្សែតាងតំណាងអនុគមន៍ f ខាងលើចំពោះ $m=1$។

ក. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ចំពោះ $m=1$។

ខ. រកអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប (C)។

គ. គណនា $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-1)$ និង $f(0)$។ សង់ C ។

ឃ. កំណត់តម្លៃ k ដោយប្រើខ្សែកោង (C) ដើម្បីឱ្យសមីការ $x^2+(1-k)x-2k-3=0$ មានឫសពីរផ្សេងផ្ទាត់ $x_1<-2$ និង $x_2>-1$។