កម្រងវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងជ្រើសរើស៖

- ☑ គ្រូបឋមសិក្សា និងមតេយ្យសិក្សា
- ☑ គ្រូកម្រិតមូលដ្ឋាន

ពីឆ្នាំ ២០០២ ដល់២០១៨

កម្រងវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងជ្រើសរើស៖

☑ គ្រូបឋមសិក្សា និងមតេយ្យសិក្សា

ពីឆ្នាំ ២០០២ ដល់២០១៨

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ១៤ វិច្ឆិកា ២០០២

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ : $f(x)=\dfrac{\sin 2x-\sin x}{\sin 2x+\sin x}$ កាលណា x ខិតជិតសូន្យ ។

ខ. គណនាផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្ត នៃចំនួនកុំផ្លិច : $z=\dfrac{1+i}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}$ ។ (**២ពិន្ទុ**)

II. សិក្សាភាពជាប់ និងភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ : $f(x)=\left|(x-1)(x^2-x)\right|$ ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។ (**២ពិន្ទុ**)

III. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=\left|(x-1)(x-2)\right|$ ។ គណនា $J=\int_0^2 f(x)dx$ ។ (**១ពិន្ទុកន្លះ**)

IV. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$, $C(6,5,2)$ និង $D(7,7,5)$ ។

ក. បង្ហាញថា $ABCD$ ជាកំពូលនៃប្រលេឡូក្រាម ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាមនេះ ។ (**២ពិន្ទុ**)

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=2+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ដែលកំណត់ក្នុង $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ។

ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា ។

ខ. រកឫសនៃសមីការ $f(x)=0$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់ ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 0 ។ (**២ពិន្ទុកន្លះ**)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០២

I. **ក. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ :**

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{\sin 2x+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\times\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{\sin x}{x}}{2\times\frac{\sin 2x}{2x}+\frac{\sin x}{x}}$$

$$=\frac{2\times 1-1}{2\times 1+1}=\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{3}}$

ខ. គណនាផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្ត នៃចំនួនកុំផ្លិច z :

$$z=\frac{1+i}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}=\frac{1+i}{\left[\left(1+i\sqrt{3}\right)^2\right]^2}$$

$$=\frac{1+i}{\left(1+2i\sqrt{3}+3i^2\right)^2}$$

$$=\frac{1+i}{\left(-2+2i\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1+i}{4\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1+i}{4\left(1-2i\sqrt{3}+3i^2\right)}$$

$$=\frac{1+i}{4\left(-2-2i\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{(1+i)\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{8\left(-1-i\sqrt{3}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{-1+i\sqrt{3}-i-\sqrt{3}}{8\left(1-3i^2\right)}$$

$$=\frac{\left(-1-\sqrt{3}\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)}{32}$$

ដូចនេះ z មានផ្នែកពិតស្មើ $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{32}$ និងមានផ្នែកនិមិត្តស្មើ $\dfrac{\sqrt{3}-1}{32}$ ។

II. សិក្សាភាពមានដេរីវេនៃ f ត្រង់ចំណុច $x=0$

យើងមាន $f(x)=\left|(x-1)\left(x^2-x\right)\right|$

$$=\left|x(x-1)^2\right|=|x|(x-1)^2$$

ព្រោះ $(x-1)^2\geq 0$ មិនចាំបាច់ដាក់តម្លៃដាច់ខាត

-សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $x=0$:

អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

•ចំពោះ $x\to 0^-$ នោះ $|x|=-x$ យើងបាន :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left[-x(x-1)^2\right]=-0\cdot 1=0$$

•ចំពោះ $x\to 0^+$ នោះ $|x|=x$ យើងបាន :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x(x-1)^2=0\cdot 1=0$$

•ចំពោះ $x=0$ នោះយើងបាន

$$f(0)=|0|(0-1)^2=0$$

យើងឃើញថា $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ជាប្រាកដ ។

-សិក្សាភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $x=0$:

f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $f'_-(0)=f'_+(0)$

$$\bullet f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)}{h}\ ,\ f(0)=0$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|(h-1)^2}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h(h-1)^2}{h}=-1$$

$$\bullet f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)}{h}\ ,\ f(0)=0$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|(h-1)^2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(h-1)^2}{h}=1$$

ឃើញថា $f'_-(0)=-1\neq f'_+(0)=1$

ដូចនេះ f គ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ទេ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាល $J=\int_0^2 f(x)\,dx$ ៖

យើងមាន $f(x)=\left|(x-1)(x-2)\right|=\left|x^2-3x+2\right|$

យើងនឹងសិក្សាសញ្ញានៃកន្សោម x^2-3x+2

ឱ្យ $x^2-3x+2=0$ មានឫស $x=1\,,\ x=2$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

យើងបានតម្លៃនៃ $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$ គឺ

-ចំពោះ $0<x<1$: $\left|x^2-3x+2\right|=x^2-3x+2$

-ចំពោះ $1<x<2$: $\left|x^2-3x+2\right|=-\left(x^2-3x+2\right)$

$$\mathbf{J}=\int_0^2 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^2\left|x^2-3x+2\right|dx$$

$$=\int_0^1\left(x^2-3x+2\right)dx-\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2-0\right)-\left[\left(\frac{8}{3}-\frac{12}{2}+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2-\frac{8}{3}+\frac{12}{2}-4+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2=\boxed{1}$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{J=1}$ ។

IV. ក. បង្ហាញថា $ABCD$ ជាកំពូលនៃប្រលេឡូក្រាម

យើងមាន $A(1,1,1)\,,\ B(2,3,4),\ C(6,5,2)$ និង $D(7,7,5)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=(1,2,3)$ និង $\overrightarrow{CD}=(1,2,3)$

ដោយចតុកោណ $ABCD$ មាន $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

ដូចនេះ: ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ៖

តាមរូបមន្ត $S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ ដែល $\overrightarrow{AC}=(5,4,1)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}=-10\vec{i}+14\vec{j}-6\vec{k}$$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\sqrt{(-10)^2+(14)^2+\left(-6^2\right)}=2\sqrt{70}$

ដូចនេះ: ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមគឺ $S=2\sqrt{70}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

V. ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

គេមាន $f(x)=2+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ដែល $x\neq-1$

គេបាន $f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{(x+1)^3}$

$$=\frac{-x-1+2}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{-x+1}{(x+1)^3}$$

ដូចនេះ: $\boxed{f'(x)=\dfrac{-x+1}{(x+1)^3}}$ ។

➤សិក្សាសញ្ញារបស់វា

ឱ្យ $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-x+1}{(x+1)^3}=0$

គេបាន $\begin{cases}-x+1=0\\ x+1\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ x\neq-1\end{cases}$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+1)^3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)=\dfrac{-x+1}{(x+1)^3}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

ដូចនេះ: $f'(x)>0$ កាលណា $x\in(-1\,,1)$

$f'(x)<0$ កាលណា $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$f'(x)=0$ ចំពោះ: $x=1$

ខ. រកឫសនៃសមីការ $f(x)=0$

គេបាន $2+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=0$ (គុណនឹង $(x+1)^2$)

$$2(x+1)^2+(x+1)-1=0$$

$$2x^2+5x+2=0$$

មាន $\Delta=5^2-4\cdot2\cdot2=25-16=9$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm3}{4}=\left[\begin{array}{l}-2\\ -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

ដូនេះ: សមីការមានឫស $\boxed{x=-2\,,\ x=-\dfrac{1}{2}}$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ f

• លីមីតតាមចុងដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូត

គេមាន $f(x)=2+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^2+5x+2}{(x+1)^2}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+5x+2}{(x+1)^2}=2$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\left(\frac{2x^2+5x+2}{(x+1)^2}\right)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{2x^2+5x+2}{(x+1)^2}\right)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

• បរមានៃអនុគមន៍ f : តាមតារាងសញ្ញា $f'(x)$

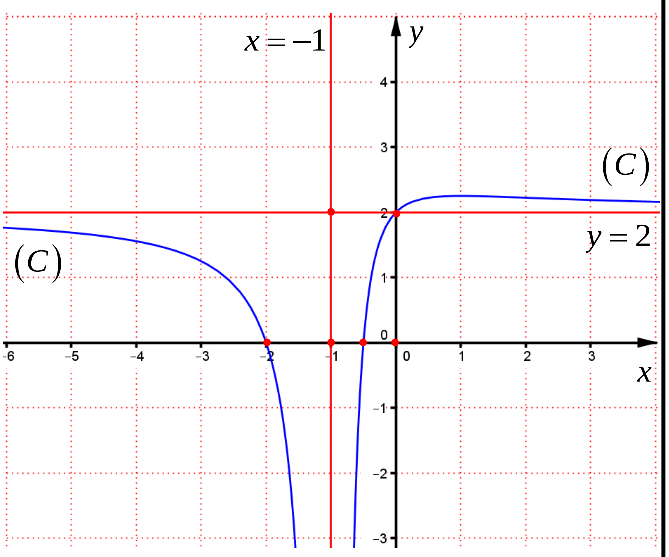
ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(1)=9/4$ ។

• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	$9/4$	$\searrow 2$

• **គូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ f**



➢ រកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់

ដោយ ឫសនៃដេរីវេទី២គឺជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចរបត់

គេមាន $f'(x)=\dfrac{-x+1}{(x+1)^3}$

$$f''(x)=\frac{-(x+1)^3-3(x+1)^2(-x+1)}{(x+1)^6}$$

$$=\frac{-(x+1)-3(-x+1)}{(x+1)^4}=\frac{2x-4}{(x+1)^4}$$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-4}{(x+1)^4}=0$, $\forall x\in D$,

$(x+1)^4>0$ នាំឱ្យ f'' មានសញ្ញាដូច $2x-4$

គេបាន $2x-4=0$ នោះ $x=2$

$$f(2)=2+\frac{1}{2+1}-\frac{1}{(2+1)^2}=\frac{20}{9}$$

តារាងសញ្ញា $f''(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

ត្រង់ $x=2$, $f''(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញា

នេះបញ្ជាក់ថា f ផ្លាស់ប្តូរភាពផតប៉ោង

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចរបត់គឺ $\left(2\,,\,\dfrac{20}{9}\right)$ ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង C

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x_0=0$

គេបាន $f'(x_0)=f'(0)=\dfrac{-0+1}{(0+1)^3}=1$

$$f(x_0)=f(0)=2+\frac{1}{0+1}-\frac{1}{(0+1)^2}=2$$

នាំឱ្យ $y=1(x-0)+2=x+2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរកបានគឺ $\boxed{y=x+2}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ១៤ វិច្ឆិកា ២០០៣

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ : $f(x)=(x^2+3x+5)e^{6x}$, $g(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ ។

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $h(x)=x\ln x+1$ ត្រង់ចំណុច $M(1,1)$ ។ (**២ពិន្ទុ**)

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ : $I=\int(2\sin x+3\cos x)dx$, $J=\int\dfrac{dx}{x^2-5x+6}$ ។

ខ. រកផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=x^2+2x$ និងបន្ទាត់ $y=x+2$ ។ (**២ពិន្ទុ**)

III. ដោះស្រាយសមីការ : $\dfrac{4-x}{1986}+\dfrac{3-x}{1987}+\dfrac{2-x}{1988}+\dfrac{1-x}{1989}=-4$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

IV. គេមានបីចំណុច $A(-1,1,2)$, $B(0,2,4)$ និង $C(-1,3,1)$ ។

ក. គណនាផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញបញ្ជាក់ថា ចំណុច A , B និង C មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

ខ. ចូររកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។ (**២ពិន្ទុ**)

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=\dfrac{3-x}{x}$ ។

ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ ។

ខ. ចំណុច A និង B មានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា 1 និង 3 ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង C ។ ចូរកំណត់សមីការបន្ទាត់ AB រួចទាញរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ទាំងអស់ដែលស្របនឹងបន្ទាត់ AB ។ (**៣ពិន្ទុ**)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៣

I. ក. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ :

$$f(x)=(x^2+3x+5)e^{6x}$$

$$f'(x)=(x^2+3x+5)'e^{6x}+(e^{6x})'(x^2+3x+5)$$
$$=(2x+3)e^{6x}+6e^{6x}(x^2+3x+5)$$
$$=\boxed{(6x^2+20x+33)e^{6x}}$$

$$g(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}=\ln(x+1)-\ln(x-1)$$

$$g'(x)=\frac{(x+1)'}{x+1}-\frac{(x-1)'}{x-1}$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-x-1}{x^2-1}=\boxed{-\frac{2}{x^2-1}}$$

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ :

គេមាន $h(x)=x\ln x+1$ និងចំណុច $M(1,1)$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=h'(x_0)(x-x_0)+h(x_0)$

គេមាន បន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុច $M(1,1)$

នោះ $x_0=1,\ h(x_0)=1$

ហើយ $h'(x)=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+1$

$h'(x_0)=h'(1)=\ln 1+1=1$

នាំឱ្យ $y=1(x-1)+1=x$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $\boxed{y=x}$ ។

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ :

$$\mathbf{I}=\int(2\sin x+3\cos x)dx$$
$$=-2\cos x+3\sin x+c\ ,\ c \text{ ថេរ}$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I}=-2\cos x+3\sin x+c\ \ ,\ c \text{ ថេរ}}$ ។

$$\mathbf{J}=\int\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}$$

$$=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx=\int\left(\frac{(x-3)'}{x-3}-\frac{(x-2)'}{x-2}\right)dx$$

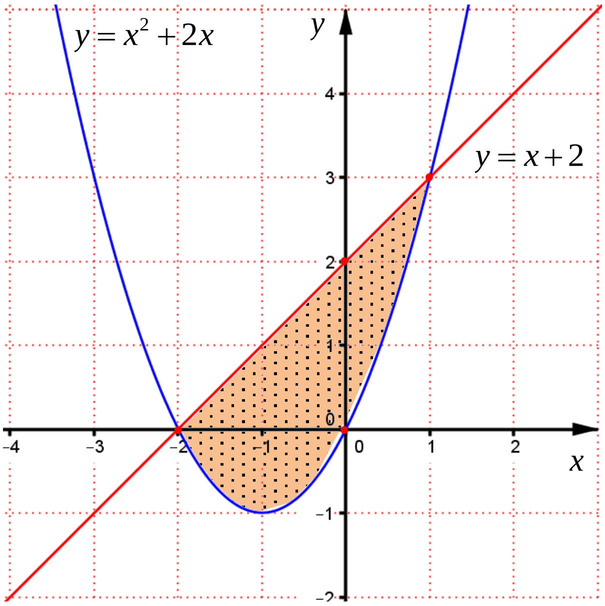
$$=\ln|x-3|-\ln|x-2|+c\ ,\ c \text{ ថេរ}$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{J}=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+c\ \ ,\ c \text{ ថេរ}}$ ។

ខ. រកផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង និងបន្ទាត់

គេមាន ខ្សែកោង $y=x^2+2x$ និងបន្ទាត់ $y=x+2$

គេសង់ក្រាបប៉ារ៉ាបូល និងបន្ទាត់ ដើម្បីដឹងទីតាំង និងប្រើរូបមន្ត



តាមក្រាបផ្ទៃក្រឡាប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាបទាំងពីរគឺ

$$S=\int_{-2}^{1}\left[(x+2)-(x^2+2x)\right]dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-4\right)=-3+\frac{3}{2}+6=\frac{9}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផ្ទៃគណនាបាន } S=4.5 \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

III. ដោះស្រាយសមីការ :

$$\frac{4-x}{1986}+\frac{3-x}{1987}+\frac{2-x}{1988}+\frac{1-x}{1989}=-4$$

$$\frac{4-x}{1986}+1+\frac{3-x}{1987}+1+\frac{2-x}{1988}+1+\frac{1-x}{1989}+1=0$$

$$\frac{1990-x}{1986}+\frac{1990-x}{1987}+\frac{1990-x}{1988}+\frac{1990-x}{1989}=0$$

$$(1990-x)\left(\frac{1}{1986}+\frac{1}{1987}+\frac{1}{1988}+\frac{1}{1989}\right)=0$$

នាំឱ្យ $1990-x=0\Rightarrow x=1990$

ដូចនេះ សមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $\boxed{x=1990}$ ។

IV. **ក. គណនាផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ** $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

គេមាន $A(-1,1,2)$, $B(0,2,4)$ និង $C(-1,3,1)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=(1,1,2)$, $\overrightarrow{AC}=(0,2,-1)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=-5\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-5\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}}$ ។

➤ **ទាញបញ្ជាក់ថា ចំណុច A , B និង C មិនរត់ត្រង់គ្នា**

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-5\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\neq\vec{0}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បីចំណុច } A , B , C \text{ រត់មិនត្រង់ជួរ}}$ ។

ខ. រកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-5,1,2)$

គេបាន $S=\frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+1^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{30}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផ្ទៃនៃត្រីកោណគឺ } S=\frac{\sqrt{30}}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}}$ ។

V. **ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ :**

គេមាន $y=\frac{3-x}{x}=\frac{3}{x}-1$

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ មានន័យលុះត្រាតែ $x\neq 0$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{0\}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព :

ដេរីវេ $y'=\left(\frac{3}{x}-1\right)'=-\frac{3}{x^2}<0$, $\forall x\in D$

នាំឱ្យ y ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ D និងគ្មានបរមាទេ

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}-1\right)=0-1=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}-1\right)=0-1=-1$$

$$\lim_{x\to0^-}y=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{3}{x}-1\right)=-\infty-1=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}y=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{3}{x}-1\right)=+\infty-1=+\infty$$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}y=-1$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

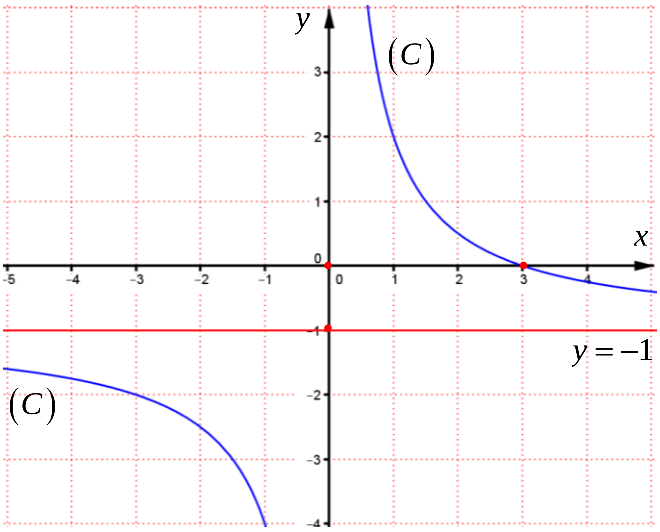
ដោយ $\lim_{x\to0}y=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	‖	$-$
y	-1 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ -1

• **សង់ខ្សែកោង** (C)

បើ $y=0\Leftrightarrow\frac{3-x}{x}=0\Rightarrow x=3$



ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ AB

គេមាន ចំណុច A និង B មានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា 1 និង 3 ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង C នោះគេបាន ៖

ចំពោះ $x=1$: $y(1)=\frac{3}{1}-1=2$

ចំពោះ $x=3$: $y(3)=\frac{3}{3}-1=0$

គេបាន កូអរដោនេចំណុច $A(1,2)$ និង $B(3,0)$

ដោយ $(AB): y=ax+b$ ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស

$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-2}{3-1}=-1$ និងកាត់ $A(1,2)$

គេបាន $2=(-1)(1)+b$ នាំឱ្យ $b=3$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់កំណត់បាន $\boxed{(AB): y=-x+3}$ ។

➢ទាញរកសមីការ បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ទាំងអស់ ស្របនឹងបន្ទាត់ AB

បន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះស្របនឹងបន្ទាត់ (AB) គេបាន $y'(x_0) = -1$

នាំឱ្យ $-\dfrac{3}{x_0^2} = -1$ នោះ $x_0 = \pm\sqrt{3}$

• ចំពោះ $x_0 = -\sqrt{3}$

នាំឱ្យ $y(x_0) = y\left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{3}{-\sqrt{3}} - 1 = -\sqrt{3} - 1$

គេបាន $y = -1\left(x + \sqrt{3}\right) - \sqrt{3} - 1 = -x - 2\sqrt{3} - 1$

• ចំពោះ $x_0 = \sqrt{3}$

នាំឱ្យ $y(x_0) = y\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{3}} - 1 = \sqrt{3} - 1$

គេបាន $y = -1\left(x - \sqrt{3}\right) + \sqrt{3} - 1 = -x + 2\sqrt{3} - 1$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះទាំងអស់ដែលរកបានគឺ ៖

$$\boxed{y = -x - 2\sqrt{3} - 1 \quad , \quad y = -x + 2\sqrt{3} - 1}$$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ១៣ វិច្ឆិកា ២០០៤

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ចូរដោះស្រាយវិសមីការ :

ក. $\sin x+\sqrt{3}\cos x\geq 1$ បើ $-\pi<x<\pi$ ។

ខ. $\log_2(2-x)+\log_4(x+3)\leq 1$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. កំណត់ចំនួនថេរ a និង b ដើម្បីឱ្យចំពោះគ្រប់ x គេបាន : $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x(x+1)}+\dfrac{b}{(x+1)(x+2)}$ ។

ខ. គណនាផលបូក $S=\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ រួចរកលីមីត S កាលណា $n\to+\infty$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. គេបង្កើតគណៈកម្មការមួយមានសមាជិក 5 នាក់ ក្នុងចំណោម 12 នាក់ ។ ចំពោះមនុស្សទាំងនេះ មានពីរនាក់ A និង B អាចចូលជាសមាជិកបានលុះត្រាតែចូលទាំងពីរនាក់ ។

ក. តើគេអាចបង្កើតគណៈកម្មការនេះបានប៉ុន្មានរបៀប ?

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យ A និង B បានចូលជាសមាជិកគណៈកម្មការទាំងពីរនាក់ ។ **(២ពិន្ទុ)**

IV. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់នៃលំហគេឱ្យប្លង់ (P) និងស្វ៊ែ (S) មានសមីការរៀងគ្នា : $(P): x+2y+2z+5=0$ និង $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត I និងកាំ R នៃស្វ៊ែ (S) ។

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S) រួចរកសមីការបណ្តាប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ រួចស្រាយថាខ្សែកោងនេះមានផ្ចិតបំលែងឆ្លុះមួយ ។

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ដោយដឹងថាបន្ទាត់ប៉ះនេះកាត់តាមចំណុច $A(0,2)$ ។

គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃ S ផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ $x=3$, $x=4$ ។ **(៣ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៤

I. ដោះស្រាយវិសមីការ :

ក. $\sin x+\sqrt{3}\cos x\ge 1$ (បើ $-\pi<x<\pi$)

$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\ge\frac{1}{2}$

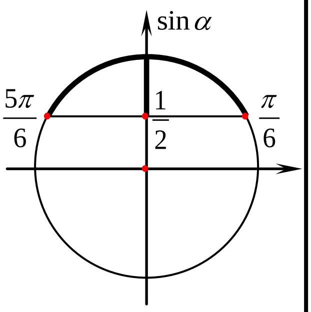
$\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\ge\frac{1}{2}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ge\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}$



ដូចនេះ: វិសមីការមានចម្លើយ $\boxed{-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}}$ ។

ខ. $\log_2(2-x)+\log_4(x+3)\le 1$

វិសមីការមានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases}2-x>0\\x+3>0\end{cases}\Rightarrow -3<x<2$

គេបាន $\log_2(2-x)+\frac{1}{2}\log_2(x+3)\le 1$

$2\log_2(2-x)+\log_2(x+3)\le 2$

$\log_2(2-x)^2+\log_2(x+3)\le 2$

$\log_2(4-4x+x^2)(x+3)\le\log_2 2^2$

$4x+12-4x^2-12x+x^3+3x^2\le 4$

$x^3-x^2-8x+8\le 0$

$x^2(x-1)-8(x-1)\le 0$

$(x-1)(x^2-8)\le 0$

ឱ្យ $x-1=0\Rightarrow x=1$ និង $x^2-8=0\Rightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$ -3	$-2\sqrt{2}$	1	2	$2\sqrt{2}$	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$
x^2-8	$+$	$+$ 0	$-$	$-$	$-$ 0	$+$
$(x-1)(x^2-8)\le 0$	$-$	$-$ 0	$+$ 0	$-$	$-$ 0	$+$
$-3<x<2$						
ចម្លើយ						

ដូចនេះ: $\boxed{x\in(-3\,,-2\sqrt{2}]\cup[1\,,2)}$ ជាចម្លើយ ។

II. ក. កំណត់ចំនួនថេរ a និង b : (ដូចគ្រូមធ្យមឆ្នាំ 2009)

គេមាន $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x(x+1)}+\frac{b}{(x+1)(x+2)}$

$=\frac{a(x+2)+bx}{x(x+1)(x+2)}=\frac{(a+b)x+2a}{x(x+1)(x+2)}$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}a+b=0\\2a=1\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}$

ដូចនេះ: កំណត់បាន $\boxed{a=\frac{1}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}}$ ។

ខ. គណនាផលបូក S

គេមាន $S=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+.......+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ហើយ $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{1/2}{x(x+1)}+\frac{-1/2}{(x+1)(x+2)}$

$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right]$

យក $x=1\,,2\,,3\,,...\,,n$ គេបាន ៖

$$+\begin{cases}\frac{1}{1\cdot2\cdot3}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right]\\ \frac{1}{2\cdot3\cdot4}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right]\\ \frac{1}{3\cdot4\cdot5}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}\right]\\ \text{..}\\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\end{cases}$$

$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

ដូចនេះ: គណនាបាន $\boxed{S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)}$

≻ **រកលីមីត** S **កាលណា** $n\to+\infty$

គេមាន $\lim\limits_{n\to+\infty}S=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{4}$

ដូចនេះ: គណនាបាន $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}S=\frac{1}{4}}$ ។

III. ក. តើគេអាចបង្កើតគណៈកម្មការនេះបានប៉ុន្មានរបៀប ?

ដោយ មនុស្សទាំងអស់មាន 12 នាក់ ចង់បង្កើតគណៈកម្មការ មានគ្នា 5 នាក់ វាជាបន្សំនៃ 5 ធាតុយកពី 12 ធាតុ

គេតាង $n(s)=C(12\,,5)=\dfrac{12!}{(12-5)!\cdot 5!}$

$=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=792$

ដូចនេះ ចំនួនគណៈកម្មការបង្កើតបាន 792 របៀប ។

ខ. រកប្រូបាប A និង B ចូលជាសមាជិកទាំងពីរនាក់

ដើម្បីជ្រើសរើសបាន A និង B ទាំងពីរនាក់ នោះគេត្រូវជ្រើសរើសមនុស្ស 3 ពី 10 នាក់ផ្សេងទៀត

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ជ្រើសបានទាំង A និង B

គេបាន $n(A)=C(2\,,2)\times C(10\,,3)$

$=1\times\dfrac{10!}{(10-3)!\cdot 3!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 3\cdot 2}=120$

នាំឱ្យ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{120}{792}=\dfrac{5}{33}$

ដូចនេះ ប្រូបាបរកបានគឺ $P(A)=\dfrac{5}{33}$ ។

IV. ក. កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត I និងកាំ R នៃស្វ៊ែ (S)

គេបំលែងសមីការស្វ៊ែ (S) ជាទម្រង់ស្តង់ដា

$(S):\ x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$

$(x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2+4z)=0$

$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)+(z^2+4z+4)=9$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=3^2$

ផ្ទឹមនឹង $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

នាំឱ្យ ផ្ចិត $I(a\,,b\,,c)=I(1\,,2\,,-2)$, កាំ $r=3$

ដូចនេះ ស្វ៊ែនេះមានផ្ចិត $I(1\,,2\,,-2)$ និងកាំ $r=3$ ។

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S)

តាមរូបមន្ត $d(I\,,(P))=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $I(1\,,2\,,-2)$ និង $(P):x+2y+2z+5=0$

នាំឱ្យ $d(I\,,(P))=\dfrac{|1\cdot 1+2\cdot 2+2(-2)+5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{|6|}{3}=2$

ដោយ $d=2<r=3$ នោះប្លង់ (P) ត្រូវកាត់ស្វ៊ែ (S)

ដូចនេះ ប្លង់ (P) ត្រូវកាត់ស្វ៊ែ (S) ត្រូវបានបង្ហាញ ។

➤រកសមីការបណ្តាប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S)

គេតាង សមីការប្លង់ត្រូវរកមានរាង ៖

$(\alpha)\ :\ ax+by+cz+d=0$

ដោយ $(\alpha)\parallel(P)$ នោះ (α) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ដូច (P) គឺ $\vec{n}=(1\,,2\,,2)$ នោះគេបាន ៖

$(\alpha)\ :\ x+2y+2z+d=0$

តែប្លង់ (α) ប៉ះស្វ៊ែ (S) នោះ $d(I\,,(\alpha))=r=3$

គេបាន $\dfrac{|1\cdot 1+2\cdot 2+2(-2)+d|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=3\ \Leftrightarrow\ \dfrac{|1+d|}{3}=3$

នាំឱ្យ $|1+d|=9\ \Leftrightarrow\ 1+d=\pm 9\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l} d=-10\\ d=8\end{array}\right.$

ដូចនេះ បណ្តាសមីការប្លង់ត្រូវរកអាចសរសេរបានគឺ ៖

$(\alpha_1)\ :\ x+2y+2z-10=0$
$(\alpha_2)\ :\ x+2y+2z+8=0$ ។

V. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍

គេមាន $y=f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}$

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $-2x-4\neq 0$

នាំឱ្យ $-2x\neq 4$ នោះ $x\neq -2$

ដូចនេះ $D=\mathbb{R}-\{-2\}=(-\infty\,,-2)\cup(-2\,,+\infty)$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

ដេរីវេ $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}\right)'$

$=\dfrac{(2x-2)(-2x-4)+2(x^2-2x+1)}{(2x+4)^2}$

$=\dfrac{2(x-1)(-2x-4)+2(x-1)^2}{(2x+4)^2}$

$=\dfrac{2(x-1)(-2x-4+x-1)}{(2x+4)^2}$

$=\dfrac{2(x-1)(-x-5)}{(2x+4)^2}$

គេឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-1)(-x-5)}{(2x+4)^2}=0$

$\forall x\in D\ ,\ \Leftrightarrow (2x+4)^2>0$

នាំឱ្យ $(x-1)(-x-5)=0$ នោះ $x=1\ ,\ x=-5$

គេបាន $f(1)=\dfrac{1^2-2\cdot1+1}{-2\cdot1-4}=0$

$f(-5)=\dfrac{(-5)^2-2(-5)+1}{-2(-5)-4}=\dfrac{36}{6}=6$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

• ត្រង់ $x=-5$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(-5)=6$ ។

• ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(1)=0$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{-2x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{-2x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2-2x+1}{-2(x+2)}=\dfrac{9}{-2(-2+0^-+2)}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2-2x+1}{-2(x+2)}=\dfrac{9}{-2(-2+0^++2)}=-\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

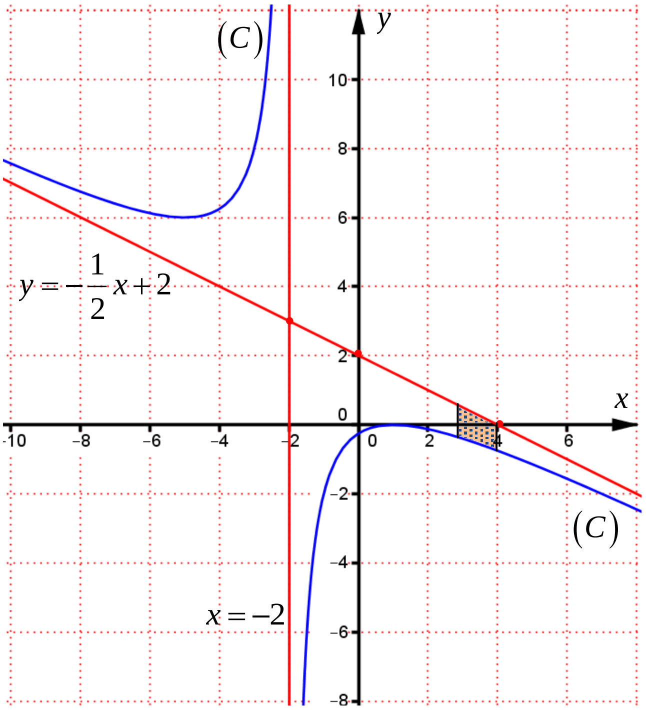
ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}=-\dfrac{1}{2}x+2+\dfrac{9}{-2x-4}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{9}{-2x-4}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=-\dfrac{1}{2}x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

➤សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍



➤ស្រាយថាខ្សែកោងនេះមានផ្ចិតឆ្លុះមួយ

របៀបទី១ តាមរូបមន្ត

ដោយ អាស៊ីមតូតទាំងពីរ $x=-2$ និង $y=-\dfrac{1}{2}x+2$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $I(-2\ ,3)$ គេនឹងស្រាយថា I ជាផ្ចិតបំលែងឆ្លុះនៃក្រាប (C)

បើ $I(a\ ,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C តាងអនុគមន៍ f លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(2a-x)+f(x)=2b$

គេបាន $f(-4-x)+f(x)=6$

ដោយ $f(-4-x)=\dfrac{(-4-x)^2-2(-4-x)+1}{-2(-4-x)-4}$

$=\dfrac{16+8x+x^2+8+2x+1}{8+2x-4}$

$=\dfrac{x^2+10x+25}{2x+4}=\dfrac{-x^2-10x-25}{-2x-4}$

គេបាន $\dfrac{-x^2-10x-25}{-2x-4}+\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}=\dfrac{-12x-24}{-2x-4}=6$

ដូចនេះ **ក្រាប (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយគឺ $I(-2\ ,3)$** ។

របៀបទី២ តាមវិធីរំកិលអ័ក្ស

គេបំលែងកិលអ័ក្សពីតម្រុយ xoy ទៅតម្រុយថ្មី XIY

តាមរូបមន្ត បំលែងកិលអ័ក្ស $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$

ដោយ អាស៊ីមតូតទាំងពីរ $x = -2$ និង $y = -\frac{1}{2}x + 2$

ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $I(a\,,b) = I(-2\,,3)$

គេបាន $\begin{cases} x = -2 + X \\ y = 3 + Y \end{cases}$

គេមាន $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{-2x - 4}$

គេបាន $Y + 3 = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{-2x - 4}$

$$Y + 3 = \frac{(X-2)^2 - 2(X-2) + 1}{-2(X-2) - 4}$$

$$Y = \frac{X^2 - 4X + 4 - 2X + 4 + 1}{-2X} - 3$$

$$F(X) = \frac{X^2 + 9}{-2X} \quad , \quad Y = F(X)$$

ដោយ $\forall X \neq 0$ គេបាន ៖

$$F(-X) = \frac{(-X)^2 + 9}{2X} = -\frac{X^2 + 9}{-2X} = -F(X)$$

នាំឱ្យ $F(X)$ ជាអនុគមន៍សេសមាន $I(-2\,,3)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ

ដូចនេះ ក្រាប (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយគឺ $I(-2\,,3)$ ។

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C)

➢របៀបទី១

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

គេបាន $y = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0)$

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះនេះកាត់តាមចំណុច $A(0\,,2)$

$$f'(x_0)\cdot 0 - f'(x_0)x_0 + f(x_0) = 2$$

$$-f'(x_0)x_0 + f(x_0) = 2$$

តែ $-f'(x_0)x_0 = \dfrac{-2(x_0 - 1)(-x_0 - 5)x_0}{(2x_0 + 4)^2}$

$$= \frac{(2x_0^2 - 2x_0)(x_0 + 5)}{(2x_0 + 4)^2}$$

$$= \frac{2x_0^3 + 8x_0^2 - 10x_0}{(2x_0 + 4)^2}$$

$$f(x_0) = \frac{x_0^2 - 2x_0 + 1}{-2x_0 - 4} = \frac{(x_0^2 - 2x_0 + 1)(-2x_0 - 4)}{(2x_0 + 4)^2}$$

$$= \frac{-2x_0^3 + 6x_0 - 4}{(2x_0 + 4)^2}$$

គេបាន $\dfrac{2x_0^3 + 8x_0^2 - 10x_0}{(2x_0 + 4)^2} + \dfrac{-2x_0^3 + 6x_0 - 4}{(2x_0 + 4)^2} = 2$

$$\frac{2x_0^3 + 8x_0^2 - 10x_0}{(2x_0 + 4)^2} + \frac{-2x_0^3 + 6x_0 - 4}{(2x_0 + 4)^2} = 2$$

$$8x_0^2 - 4x_0 - 4 = 2(2x_0 + 4)^2$$

$$8x_0^2 - 4x_0 - 4 = 2(4x_0^2 + 16x_0 + 16)$$

$$8x_0^2 - 4x_0 - 4 = 8x_0^2 + 32x_0 + 32$$

$$36x_0 = -36$$

$$x_0 = -1$$

នាំឱ្យ $f'(x_0) = f'(-1) = \dfrac{2(-1-1)(1-5)}{(-2+4)^2} = 4$

$$f(x_0) = f(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1) + 1}{-2(-1) - 4} = -2$$

នាំឱ្យ $y = 4(x+1) + (-2) = 4x + 2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរកបានគឺ $y = 4x + 2$ ។

➢របៀបទី២

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $(T):\ y = ax + b$

ដោយ (T) កាត់ $A(0\,,2)$ នោះ $2 = 0\cdot a + b$ ឬ $b = 2$

គេបាន $(T):\ y = ax + 2$

ដោយ (T) ប៉ះ (C) គេផ្ទឹមបានសមីការអាប់ស៊ីស

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{-2x - 4} = ax + 2$$

$$x^2 - 2x + 1 = -2ax^2 - 4x - 4ax - 8$$

$$(1 + 2a)x^2 + (2 + 4a)x + 9 = 0$$

ដើម្បីឱ្យ (T) ប៉ះ (C) លុះត្រាសមីការមានឫសឌុប $\begin{cases} \Delta' = 0 \\ a \neq -1/2 \end{cases}$

គេបាន $(1 + 2a)^2 - 9(1 + 2a) = 0$

$$(1 + 2a)(2a - 8) = 0$$

$a = 4$, $a = -\dfrac{1}{2}$ មិនយក (ធ្វើឱ្យជាសមី.ដឺក្រេទី១)

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរកបានគឺ $y = 4x + 2$ ។

គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃ S ផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ $x=3$, $x=4$

តាមក្រាប នៅចន្លោះ $3\le x\le 4$ អាស៊ីមតូតទ្រេតនៅពីលើក្រាប

គេបាន ផ្ទៃកំណត់ដោយ $S=\int_3^4\left[y-(c)\right]dx$ គេបាន ៖

$$S=\int_3^4\left[-\frac{1}{2}x+2-\left(-\frac{1}{2}x+2+\frac{9}{-2x-4}\right)\right]dx$$

$$=\int_3^4\frac{9}{2x+4}dx$$

$$=\frac{9}{2}\int_3^4\frac{1}{x+2}dx$$

$$=\frac{9}{2}\left[\ln|x+2|\right]_3^4$$

$$=\frac{9}{2}(\ln 6-\ln 5)$$

$$=\frac{9}{2}\ln\frac{6}{5}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃប្លង់កំណត់បាន $S=\frac{9}{2}\ln\frac{6}{5}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ១៥ ធ្នូ ២០០៥

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច : $x^2-2x+5=0$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $2-i$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx-20=0$ ។

គ. សរសេរ $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ **(២ពិន្ទុ)**

II. ចូរសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ : $f(x)=|x|$ រួចស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ តែគ្មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលពណ៌ស 12 និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅ 15 ។ គេចាប់យកពីក្នុងថង់នូវប៊ូលពីរជាមួយគ្នា ។ តើគេមានប៉ុន្មានរបៀបដើម្បីចាប់យកចេញឱ្យបានយ៉ាងតិចបំផុតប៊ូលពណ៌ ស មួយ ។ **(២ពិន្ទុ)**

IV. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(4,-2,0)$, $B(1,2,2)$, $C(2,-1,0)$ និង $D(2,-2,-1)$ ។

ក. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{CD}$ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច B ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (CD) ។

គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (d) និងប្លង់ (P) ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $f_m(x)=\ln\left(x^2+4x+m\right)$ ។

ក. កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍នេះមានដែនកំណត់ស្មើនឹងចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ។

ខ. ចំពោះតម្លៃនៃ $m=0$ ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=\ln(x+2)+\ln 2$ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $F(x)=2\left[(x+2)\ln|x+2|-x\right]$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(x^2+4x+4\right)$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៥

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច :

គេមាន $x^2-2x+5=0$

$x^2-2x+1=-4$

$(x-1)^2=(2i)^2$

$x-1=\pm 2i$

$x=1\pm 2i$

ដូចនេះ សមីការមានឫសពីរគឺ $\boxed{x=1\pm 2i}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b

បើ $2-i$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx-20=0$

គេបាន $a(2-i)^2+b(2-i)-20=0$

$a(2-i)^2+b(2-i)-20=0$

$a\left(4-4i+i^2\right)+2b-bi-20=0$

$(3a+2b-20)+(-4a-b)i=0$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}3a+2b-20=0\\-4a-b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\b=16\end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=-4\ ,\ b=16}$ ។

គ. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$ ដែល $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{1+2i+i^2}{1^2-i^2}=i$

នាំឱ្យ $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3=i^3=-i=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$

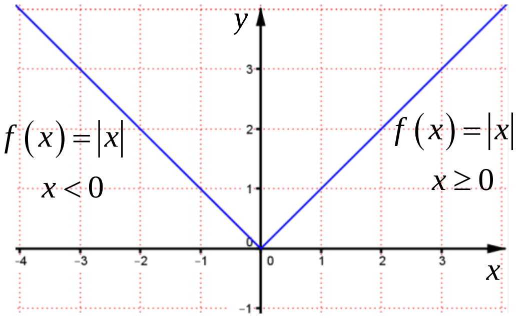
ដូចនេះ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រគឺ $\boxed{z=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}}$ ។

II. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=|x|$: (ដូចគ្រូបឋម២០០៩)

• ចំពោះ $x\ge 0$: $|x|=x$ នោះ $y=f(x)=x$

• ចំពោះ $x<0$: $|x|=-x$ នោះ $y=f(x)=-x$

គេសង់ក្រាបបាន តាមករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម ៖



➤ស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$

គេមាន $f(x)=|x|=\begin{cases}x & \text{បើ } x\ge 0\\-x & \text{បើ } x<0\end{cases}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

$f(0)=0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ } x=0}$ ។

➤ស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ គ្មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$

បើ f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $f'_-(0)=f'_+(0)$

តាមនិយមន័យដេរីវេ $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

គេបាន $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x-0}=-1$

និង $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x-0}=1$

ដោយ $f'_-(0)\ne f'_+(0)$ នោះ f គ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ទេ

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ គ្មានដេរីវេត្រង់ } x=0 \text{ ទេ}}$ ។

III. រកចំនួនរបៀបយកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុត :

របៀបទី១

គេមាន ប៊ូលពណ៌ស 12 និងប៊ូលខ្មៅ 15 គេយកប៊ូលពីរ

នាំឱ្យ ចំនួនរបៀបចាប់ប៊ូលទាំងអស់ស្មើ $C(27\ ,\ 2)$ ដែល

$C(27\ ,\ 2)=\dfrac{27!}{(27-2)!\cdot 2!}=\dfrac{27\cdot 26\cdot 25!}{25!\cdot 2}=351$

ដោយ ព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុត បំពេញនឹងព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ូលពណ៌ខ្មៅទាំងពីរ

ហើយ ព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ូលពណ៌ខ្មៅទាំងពីរគឺ $C(15,\ 2)$

$C(15\ ,\ 2)=\dfrac{15!}{(15-2)!\cdot 2!}=\dfrac{15\cdot 14\cdot 13!}{13!\cdot 2}=105$

គេបាន ចំនួនរបៀបយកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុតស្មើ $C(27,\ 2)-C(15,\ 2)=351-105=246$ របៀប

ដូចនេះ $\boxed{\text{របៀបយកបានប៊ូលសយ៉ាងតិចមួយគឺ } 246 \text{ របៀប}}$ ។

របៀបទី២

ព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុតមានន័យថា យកបានប៊ូលសមួយ ឬប៊ូលសពីរ គេបាន ៖

ចំនួនរបៀបយកបានប៊ូលសមួយយ៉ាងតិចបំផុតគឺ

$=C(12\,,1)C(15\,,1)+C(12\,,\,2)$

$=12\times15+\dfrac{12!}{(12-2)!\cdot 2!}$

$=180+\dfrac{12\cdot11\cdot10!}{10!\cdot 2}=180+66=246$

ដូចនេះ: | របៀបយកបានប៊ូលសយ៉ាងតិចមួយគឺ 246 របៀប | ។

IV. ក. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d) :

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតមានរាង $(d):\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\ ,\ t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+ct\end{cases}$

ដោយ (d) កាត់តាមចំណុច $A(4\,,-2\,,0)$

នោះ: $x_0=4\,,\ y_0=-2\,,\ z_0=0$

ហើយ (d) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{CD}=(0\,,-1\,,-1)$

នោះ: $a=0\,,b=-1\,,c=-1$

ដូចនេះ: សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $\boxed{(d):\begin{cases}x=4\\ y=-2-t\ ,\ t\in\mathbb{R}\\ z=-t\end{cases}}$ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P)

សមីការប្លង់ $(P):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ (P) កាត់តាមចំណុច $B(1\,,2\,,2)$

នោះ: $x_0=1\,,\ y_0=2\,,\ z_0=2$

ហើយ (P) កែងនឹងបន្ទាត់ (CD) នាំឱ្យ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{CD}=(0\,,-1\,,-1)$

នោះ: $a=0\,,b=-1\,,c=-1$

គេបាន $(P):0(x-1)-(y-2)-(z-2)=0$

$(P):-(y-2)-(z-2)=0$

$(P):y+z-4=0$

ដូចនេះ: សមីការប្លង់ $\boxed{(P):y+z-4=0}$ ។

គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (d) និងប្លង់ (P)

គេមាន $(d):\begin{cases}x=4\\ y=-2-t\\ z=-t\end{cases}$ និង $(P):\ y+z-4=0$

គេបាន $(-2-t)-t-4=0$

$(-2-t)-t-4=0$

$-2t-6=0$

$t=-3$

ចំពោះ: $t=-3$ គេបាន $\begin{cases}x=4\,,\\ y=-2-(-3)\\ z=-(-3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=1\\ z=3\end{cases}$

ដូចនេះ: | កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $(4\,,1\,,3)$ | ។

V. ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ មានដែនកំណត់ស្មើ $\mathbb{R}$:

គេមាន $f_m(x)=\ln\left(x^2+4x+m\right)$

របៀបទី១

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x^2+4x+m>0$

គេបាន $\left(x^2+4x+4\right)+(m-4)>0$

$(x+2)^2+(m-4)>0\quad,\quad(x+2)^2\geq0$

ដើម្បីឱ្យ វិសមីការពិតគ្រប់តម្លៃ $x\in\mathbb{R}$ លុះត្រា $m-4>0$

នាំឱ្យ $m>4$

ដូចនេះ: | តម្លៃ m កំណត់បានគឺ $m>4$ | ។

របៀបទី២

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x^2+4x+m>0$

ដើម្បីឱ្យ វិសមីការពិតគ្រប់តម្លៃ $x\in\mathbb{R}$ លុះត្រា $\begin{cases}a>0\\ \Delta'<0\end{cases}$

គេបាន $a=1>0\ ,\ 4-m<0$ នោះ: $m>4$

ដូចនេះ: | តម្លៃ m កំណត់បានគឺ $m>4$ | ។

ខ. ចំពោះតម្លៃនៃ $m=0$ ដោះស្រាយសមីការ

គេមាន $f(x)=\ln(x+2)+\ln2$

គេបាន $\ln\left(x^2+4x\right)=\ln(x+2)+\ln2$

លក្ខខណ្ឌ សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases}x^2+4x>0\\ x+2>0\end{cases}$

កន្សោម x^2+4x មានឫស $x=0\,,\ x=-4$

កន្សោម $x+2$ មានឫស $x=-2$

តារាងសញ្ញាដើម្បីទាញរកលក្ខខណ្ឌ

x	$-\infty$ $\quad -4$	-2	0	$+\infty$
$x^2+4x>0$	$+$ $\quad 0$	$-$	$-$ $\quad 0$	$+$
$x+2>0$	$-$	$-$ $\quad 0$	$+$	$+$
លក្ខខណ្ឌ				✓

ហេតុនេះ លក្ខខណ្ឌ $x>0$

គេបាន $\ln\left(x^2+4x\right)=\ln(2x+4)$

$$x^2+4x=2x+4$$

$$x^2+2x-4=0$$

មាន $\Delta'=1+4=5$

$x=-1+\sqrt{5}$, $x=-1-\sqrt{5}<0$ មិនយក

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=-1+\sqrt{5}}$ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$

គេមាន $F(x)=2\left[(x+2)\ln|x+2|-x\right]$

$$f(x)=\ln\left(x^2+4x+4\right)$$

គេបាន $F'(x)=\left(2\left[(x+2)\ln|x+2|-x\right]\right)'$

$$=2\left[(x+2)'\ln|x+2|+\left(\ln|x+2|\right)'(x+2)-1\right]$$

$$=2\left[\ln|x+2|+\frac{(x+2)'}{x+2}(x+2)-1\right]$$

$$=2\left[\ln|x+2|+1-1\right]=2\ln|x+2|$$

$$=\ln(x+2)^2=\ln\left(x^2+4x+4\right)=f(x)$$

ដោយ $F'(x)=f(x)$

នាំឱ្យ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អនុគមន៍ } F(x) \text{ ជាព្រីមីទីវនៃ } f(x)}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ១៨ វិច្ឆិកា ២០០៦

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ដែល z , $\frac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូឌុលស្មើគ្នា ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $|x|-x=1+2i$ ដែល x ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

គ. គេឱ្យបីចំនួន a , b និង c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $abc=1$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=1$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

II. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស និងជាអនុគមន៍កើន ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. ក. រកសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=\frac{e^x}{1-\sin x}$ ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=0$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (T) និងខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=2x+1+\ln(x-1)$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេមានការេមួយមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើ a ។ នៅក្នុងការេនោះគេសង់ការេមួយទៀត ដែលមានកំពូលវាជាចំណុចកណ្តាលនៃ ជ្រុងការេមុន ។ គេសង់ការេរបៀបនេះរហូតដល់ការេទី n ។

ក. គណនាផ្ទៃក្រឡាការេទី n ។

ខ. គណនាផលបូកផ្ទៃក្រឡាការេទាំងអស់ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(3,2,0)$ និង $B(0,-1,3)$ ។

ក. រកសមីការប្លង់ (Q) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (AB) ។

ខ. គេឱ្យចំណុច $R(5,0,0)$, $S(0,5,0)$ និង $T(0,0,-5)$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំណុច R , S និង T ជាចំណុច ដែលស្ថិតនៅលើប្លង់ (Q) ។

គ. គណនាប្រវែង AB និងផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ RST ។ **(៣ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៦

I. **ក.** **កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច** z : (ដូចគ្រូមធ្យមឆ្នាំ ២០១១)

គេតាង $z = a + bi$

នាំឱ្យ $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$

$1 - z = (1-a) - bi$

គេបាន $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$|1-z| = \sqrt{(1-a)^2 + (-b)^2}$

ដោយ z , $\frac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូឌុលស្មើគ្នា គេបាន ៖

$$\sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$$

នាំឱ្យ $\begin{cases} a^2+b^2 = 1 & (1) \\ \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(1-a)^2+(-b)^2} & (2) \end{cases}$

តាម (2) $a^2+b^2 = (1-a)^2 + b^2$

$a^2 = 1 - 2a + a^2$ នាំឱ្យ $a = \frac{1}{2}$

តាម (1) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ កំណត់បានចំនួនកុំផ្លិច $\boxed{z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i}$ ។

ខ. **ដោះស្រាយសមីការ**

គេមាន $|x| - x = 1 + 2i$ ដែល x ជាចំនួនកុំផ្លិច

តាង $x = a + bi$ នាំឱ្យ $|x| = \sqrt{a^2+b^2}$

គេបាន $\sqrt{a^2+b^2} - (a+ib) = 1 + 2i$

$\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right) - bi = 1 + 2i$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} - a = 1 \\ -b = 2 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} \sqrt{a^2+(-2)^2} - a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

គេបាន $\sqrt{a^2+4} = 1 + a$ (លើកអង្គទាំងពីរជាការេ)

$a^2 + 4 = 1 + 2a + a^2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x = \frac{3}{2} - 2i}$ ។

គ. **ស្រាយថា** $\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} = 1$

គេមាន $abc = 1$ នោះគេបាន ៖

$$\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca}$$

$$= \frac{1}{1+a+ab} + \frac{a}{a+ab+abc} + \frac{ab}{ab+abc+abca}$$

$$= \frac{1}{1+a+ab} + \frac{a}{a+ab+1} + \frac{ab}{ab+1+a}$$

$$= \frac{1+a+ab}{1+a+ab} = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} = 1}$ ។

II. **ក.** **រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍** f : (ដូចគ្រូមធ្យមឆ្នាំ ២០១១)

គេមាន $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} 1+x^2 \geq 0 & (1) \\ x + \sqrt{1+x^2} > 0 & (2) \end{cases}$

តាម (1) $1 + x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

តាម (2) $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ ដោយ $\forall x \in \mathbb{R}$

$1 + x^2 > x^2$

$\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2}$

$x + \sqrt{1+x^2} > x + |x|$

តែ $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + |x| \geq 0$

នាំឱ្យ $x + \sqrt{1+x^2} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អនុគមន៍ } f \text{ មានដែនកំណត់ } D = \mathbb{R}}$ ។

ខ. **➢បង្ហាញថា** f **ជាអនុគមន៍សេស**

គេមាន $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

នាំឱ្យ $f(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{1+(-x)^2}\right)$

$$= \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$$

$$= \ln\frac{\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)}{\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)}$$

$$= \ln \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= \ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{-1}$$

$$= -\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = -f(x)$$

ដោយ $f(-x) = f(x)$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍សេស}}$ ។

➢បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើន

គេមាន $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

តាមរូបមន្ត $y = \ln(u) \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

នាំឱ្យ $$f'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+\frac{\left(1+x^2\right)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដោយ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$ នាំឱ្យ $f'(x) > 0$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍កើន } \forall x \in \mathbb{R}}$ ។

III. ក. រកសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

គេមាន $y = \frac{e^x}{1-\sin x}$

$$y' = \frac{\left(e^x\right)'(1-\sin x)-(1-\sin x)'e^x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{e^x(1-\sin x)+e^x\cos x}{(1-\sin x)^2} = \frac{e^x(1-\sin x+\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

បន្ទាត់ប៉ះមានរាង $(T): y = y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$

ដោយ (T) ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=0$

គេបាន $x = x_0 = 0$

$$y'(x_0) = y'(0) = \frac{e^0(1-0+1)}{(1-0)^2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$y(x_0) = y(0) = \frac{e^0}{1-\sin 0} = \frac{1}{1} = 1$$

នាំឱ្យ $(T): y = 2(x-0)+1 = 2x+1$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះរកបានគឺ $\boxed{(T): y = 2x+1}$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M

គេមាន បន្ទាត់ $(T): y = 2x+1$

ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y = 2x+1+\ln(x-1)$

នោះគេផ្ទឹមបានសមីការអាប់ស៊ីសដូចខាងក្រោម ៖

$2x+1+\ln(x-1) = 2x+1$

$\ln(x-1) = 0$

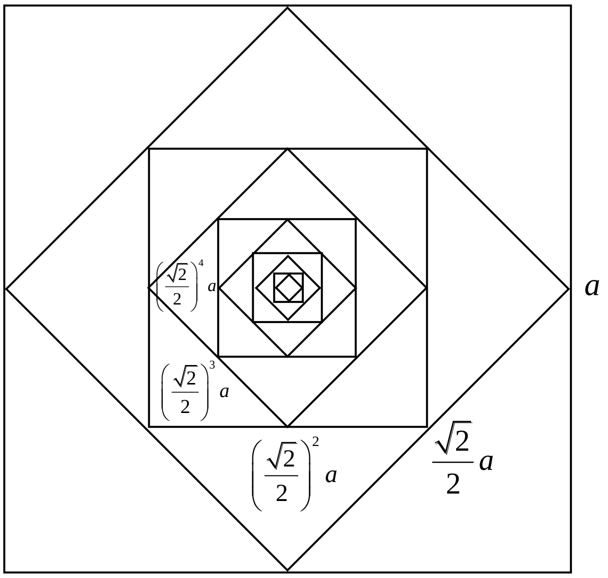
$x-1 = e^0$

$x = 2$

ចំពោះ $x = 2$: $y = 2\cdot 2+1 = 5$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $\boxed{x=2 \,,\, y=5}$ ។

IV. ក. គណនាផ្ទៃក្រឡាការេទី n :



គេបានជ្រុងនៃការេបន្តបន្ទាប់ ពីការេទី១ ទី២ ទី៣ ... ទី n គឺ៖

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 a \,,\, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 a \,,\, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 a \,,\, \ldots \,,\, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} a$$

ផ្ទៃការេទី១ $s_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{0\times 2} a^2$ ឬ $s_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 a^2$

ផ្ទៃការេទី២ $s_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1\times 2} a^2$ ឬ $s_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 a^2$

ផ្ទៃការេទី៣ $s_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2\times 2} a^2$ ឬ $s_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2$

....

ផ្ទៃការេទី n $s_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{(n-1)\times 2} a^2$ នាំឱ្យ $s_n = \frac{a^2}{2^{n-1}}$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាការេទី n គឺ $\boxed{s_n = \frac{a^2}{2^{n-1}}}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

ខ. គណនាផលបូកផ្ទៃក្រឡាការេទាំងអស់

$S = s_1 + s_2 + s_3 + ... + s_n$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^0 a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a^2$

$= a^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

$= a^2\left(\frac{s_1(q^n-1)}{q-1}\right) = a^2\left[\frac{1\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{2}-1}\right]$

$= 2a^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

ដូចនេះ គណនាបានផលបូក $\boxed{S = 2a^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$ ។

V. ក. រកសមីការប្លង់ (Q) :

ប្លង់ (Q) រាង $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ (Q) កាត់ $A(3, 2, 0)$

នោះ $x_0 = 3\,,\ y_0 = 2\,,\ z_0 = 0$

ហើយ (Q) កែងនឹងវ៉ិចទ័រ (AB) នាំឱ្យ (Q) មានវ៉ិចទ័រ

ណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-3\,,-3\,,3)$

នោះ $a=-3\,,b=-3\,,c=3$

នាំឱ្យ $(Q): -3(x-3)-3(y-2)+3(z-0)=0$

$(x-3)+(y-2)-(z-0)=0$

$x+y-z-5=0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់កំណត់បាន $\boxed{(Q): x+y-z-5=0}$ ។

ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $R\,,S$ និង T ជាចំណុចស្ថិតនៅលើប្លង់ (Q)

គេមាន $R(5\,,0\,,0)\,,\ S(0\,,5\,,0)\,,\ T(0\,,0\,,-5)$

និងប្លង់ $(Q): x+y-z-5=0$

បើចំណុច R, S, T ជាចំណុចស្ថិតនៅលើប្លង់ (Q) លុះត្រាតែកូអរដោនេចំណុចទាំងនេះផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការប្លង់ (Q) គេបាន ៖

• ចំពោះ $R(5\,,0\,,0)$ នោះ $(Q): 5+0-0-5=0$ ពិត

• ចំពោះ $S(0\,,5\,,0)$ នោះ $(Q): 0+5-0-5=0$ ពិត

• ចំពោះ $T(0, 0, -5)$ នោះ $(Q): 0+0+5-5=0$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{R\in(Q)\,,S\in(Q)\,,T\in(Q)}$ ។

គ. គណនាប្រវែង AB

ដោយ $\overrightarrow{AB} = (-3\,,-3\,,3)$

នាំឱ្យ $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2+3^2} = 3\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{AB = 3\sqrt{3}}$ ឯកតាប្រវែង ។

➤គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ RST

តាមរូបមន្ត $S_{RST} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{RT}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{RS} = (-5\,,5\,,0)\,,\ \overrightarrow{RT} = (-5\,,0\,,-5)$

គេបាន $\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{RT} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -25\vec{i} - 25\vec{j} + 25\vec{k}$

នាំឱ្យ $\left|\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{RT}\right| = \sqrt{(-25)^2+(-25)^2+25^2} = 25\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{S_{RST} = \frac{25\sqrt{3}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា "១២ + ២"

សម័យប្រឡង : ១៦ វិច្ឆិកា ២០០៧

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. គេឱ្យ $P(z)=z^2+2(2+i)z+3+4i$ ដែល z ជាចំនួនកុំផ្លិច ។ បញ្ជាក់ថា $P(z)$ ជាការេនៃពហុធាដឺក្រេទី១ ។

ខ. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=1+i$ ។ បង្ហាញថា $z^3=-2+2i$ ។ ចំពោះតម្លៃនៃ z នេះ ចូររកចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា $\dfrac{a}{1+z}+\dfrac{b}{1+z^3}=2i$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ : $I=\int x^2\ln x\,dx$, $J=\int\dfrac{\sin 2x-\cos x}{\cos x}dx$ ។

ខ. គេឱ្យ $g(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$ ។ កំណត់ចំនួនពិត m , n , p ដើម្បីឱ្យបាន $g(x)=m+\dfrac{n}{x+1}+\dfrac{p}{x-3}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(-1\,,3)$ រួចគណនា $\int_0^2 g(x)dx$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. គេចង់ជ្រើសរើសសិស្ស 3 នាក់ ក្នុងចំណោមសិស្ស 12 នាក់ ដែលក្នុងនោះមានសិស្សប្រុស 7 នាក់ និងសិស្សស្រី 5 នាក់ ។ រកប្រូបាបដែលគេជ្រើសរើសបានសិស្សប្រុស 2 នាក់ និងសិស្សស្រី 1 នាក់ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n ដើម្បីឱ្យ $F(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

ខ. ចំពោះតម្លៃ a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n ដែលរកឃើញក្នុងសំណួរខាងលើ បង្ហាញថា $f(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ គេឱ្យបន្ទាត់ពីរដែលមានសមីការ :

$(D_1):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ និង $(D_2):\begin{cases}3x+y-5z+1=0\\2x+3y-8z+3=0\end{cases}$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (D_1) និងបន្ទាត់ (D_2) អរតូកូណាល់គ្នា ។

ខ. តើបន្ទាត់ (D_1) និង បន្ទាត់ (D_2) កាត់គ្នាឬទេ ?

គ. ប្លង់ (P) មួយមានសមីការ $2x+3y+z-12=0$ ។ រកចម្ងាយពីគល់តម្រុយ O ទៅប្លង់ (P) ។ **(៣ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៧

I. ក. បញ្ជាក់ថា $P(z)$ ជាការេនៃពហុធាដឺក្រេទី១ :

គេមាន $P(z)=z^2+2(2+i)z+3+4i$

$\Delta'=(2+i)^2-(3+4i)$

$=4+4i+i^2-3-4i=0$

នាំឱ្យ សមីការមានឫសឌុប $z_0=\dfrac{-b'}{a}=-(2+i)$

តាមទ្រឹស្តីបទផលគុណកត្តាគេអាចដាក់ $P(z)$ ជាផលគុណកត្តា

គេបាន $P(z)=(z-z_0)(z-z_0)=(z-z_0)^2$

នាំឱ្យ $P(z)=(z+2+i)^2$

ដូចនេះ $P(z)$ ជាការេនៃពហុធាដឺក្រេទី១ ។

ខ. បង្ហាញថា $z^3=-2+2i$

គេមាន $z=1+i$

នាំឱ្យ $z^3=(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3=-2+2i$

ដូចនេះ $z^3=-2+2i$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

➤រកចំនួនពិត a និង b

គេមាន $\dfrac{a}{1+z}+\dfrac{b}{1+z^3}=2i$

ដោយ $z=1+i$ និង $z^3=-2+2i$

គេបាន $\dfrac{a}{1+1+i}+\dfrac{b}{1-2+2i}=2i$

$\dfrac{a}{2+i}+\dfrac{b}{-1+2i}=2i$

$\dfrac{a(2-i)}{2^2-i^2}+\dfrac{b(-1-2i)}{(-1)^2-(2i)^2}=2i$

$\dfrac{2a-ai}{5}+\dfrac{-b-2bi}{5}=2i$

$(2a-b)+(-a-2b)i=10i$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}2a-b=0\\-a-2b=10\end{cases}\Big|\times 2 \Rightarrow \begin{cases}2a-b=0 & (1)\\-2a-4b=20 & (2)\end{cases}$

បូកអង្គនិងអង្គនៃ $(1)+(2)$ គេបាន $-5b=20$ ឬ $b=-4$

ចំពោះ $b=-4$ នាំឱ្យ $(1):2a-(-4)=0 \Rightarrow a=-2$

ដូចនេះ ចំនួនពិតរកបាន $a=-2\,,\,b=-4$ ។

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ :

គេមាន $\mathbf{I}=\int x^2\ln x dx$

គេតាង $u=\ln x$ នោះ $du=\dfrac{1}{x}dx$

$dv=x^2dx$ នោះ $v=\dfrac{1}{3}x^3$

តាមរូបមន្ត អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int udv=uv-\int vdu$

$\mathbf{I}=\int x^2\ln xdx=\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\int\dfrac{1}{3}x^2dx$

$=\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x^3}{3}+c$, c ថេរ

$=\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+c$

ដូចនេះ គណនាបាន $\mathbf{I}=\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+c$ ។

គេមាន $\mathbf{J}=\int\dfrac{\sin 2x-\cos x}{\cos x}dx$

$=\int\dfrac{2\sin x\cos x-\cos x}{\cos x}dx$

$=\int(2\sin x-1)dx$

$=-2\cos x-x+c$, c ថេរ

ដូចនេះ គណនាបាន $\mathbf{J}=-2\cos x-x+c$, c ថេរ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត $m\,,\,n\,,\,p$

គេមាន $g(x)=m+\dfrac{n}{x+1}+\dfrac{p}{x-3}$

$g(x)=\dfrac{m(x+1)(x-3)+n(x-3)+p(x+1)}{(x+1)(x-3)}$

$=\dfrac{m(x^2-2x-3)+n(x-3)+p(x+1)}{x^2-2x-3}$

$=\dfrac{mx^2+(-2m+n+p)x+(-3m-3n+p)}{x^2-2x-3}$

ផ្ទឹមនឹង $g(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$

គេបាន $\begin{cases}m=1\\-2m+n+p=1\\-3m-3n+p=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\n=3/2\\p=3/2\end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $m=1\,,\,n=\dfrac{3}{2}\,,\;p=\dfrac{3}{2}$ ។

➤គណនា $\int_0^2 g(x)dx$

ចំពោះ $m=1\,,\,n=\frac{3}{2}\,,\;p=\frac{3}{2}$

គេបាន $g(x)=1+\frac{\frac{3}{2}}{x+1}+\frac{\frac{3}{2}}{x-3}$

នាំឱ្យ $\int_0^2 g(x)dx=1+\frac{\frac{3}{2}}{x+1}+\frac{\frac{3}{2}}{x-3}$

$=\int_0^2\left[1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-3}\right]dx$

$=\left[x+\frac{3}{2}\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x-3|\right]_0^2$

$=\left(2+\frac{3}{2}\ln x+0\right)-\left(0+0+\frac{3}{2}\ln 3\right)=2$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\int_0^2 g(x)dx=2}$ ។

III. រកប្រូបាបជ្រើសរើសបានសិស្សប្រុស 2 នាក់ និងសិស្សស្រី 1 :

គេមាន សិស្សប្រុស 7 នាក់ និងសិស្សស្រី 5 នាក់

គេចង់ជ្រើសរើសសិស្ស 3 នាក់

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាចតាងដោយ៖

$n(S)=C(12\,,\,3)=\frac{12!}{(12-3)^2\cdot 3!}$

$=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!}{9^2\cdot 3\cdot 2}=220$

ដោយ ជ្រើសរើសបានសិស្សប្រុស 2 នាក់ និងស្រី 1 នាក់

នាំឱ្យ ចំនួនករណីស្របតាងដោយ៖

$n(A)=C(7\,,\,2)\times C(5\,,\,1)$

$=\frac{7!}{5!\times 2!}\times 5=105$

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{105}{220}=\frac{21}{44}$

ដូចនេះ គណនាបានប្រូបាប $\boxed{P(A)=\frac{21}{44}}$ ។

IV. ក. កំណត់តម្លៃ $a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,,\,...\,,\,a_n$:

គេមាន $f(x)=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$

$F(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$

នាំឱ្យ $F'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+...+na_nx^{n-1}$

ដើម្បីឱ្យ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លុះត្រាតែ $F'(x)=f(x)$

$a_1+2a_2x+3a_3x^2+...+na_nx^{n-1}=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$

ផ្ទឹមមេគុណត្រូវគ្នានៃអថេរ x គេបាន ៖

$$\begin{cases}a_1=1\\2a_2=2\\3a_3=3\\............\\na_n=n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\a_2=1\\a_3=1\\..........\\a_n=1\end{cases}$$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a_1=a_2=a_3=...=a_n=1}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

ចំពោះ $a_1=a_2=a_3=...=a_n=1$

គេបាន $F(x)=x+x^2+x^3+...+x^n$ (ផលបូកស្ទីតធរ.)

$$=\frac{x(x^n-1)}{x-1}=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$$

នាំឱ្យ $F'(x)=\left(\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\right)'$

$$=\frac{\left[(n+1)x^n-1\right](x-1)-(x^{n+1}-x)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(n+1)x^{n+1}-(n+1)x^n-x+1-x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

តែ $F'(x)=f(x)$ នោះ $f(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

V. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (D_1) និង (D_2) អរតូកូណាល់គ្នា :

គេមាន $(D_1):\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$

មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_1=(1\,,\,-2\,,\,3)$

ហើយ $(D_2):\begin{cases}3x+y-5z+1=0\\2x+3y-8z+3=0\end{cases}$ យក $z=t$

គេបាន $(D_2):\begin{cases}3x+y=5t-1\\2x+3y=8t-3\end{cases}\Bigg|\times(-3)$

$$+\begin{cases}-9x-3y=-15t+3\\2x+3y=8t-3\end{cases}$$
$$-7x=-7t\qquad\Rightarrow x=t$$

ចំពោះ $x=t:\;2t+3y=8t-3\;\Rightarrow\;y=2t-1$

គេបាន $(D_2): x=t\ ,\ y=-1+2t\ ,\ z=t\ \ ,t\in\mathbb{R}$

មានមេគុណប្រាប់ទិស $\vec{u}_2=(1\ ,\ 2\ ,\ 1)$

ដោយ $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=(1)(1)+(-2)(2)+(3)(1)=0$

នាំឱ្យ $\vec{u}_1\perp\vec{u}_2$ មានន័យថា $(D_1)\perp(D_2)$

ដូចនេះ ស្រាយបានថា $\boxed{(D_1)\perp(D_2)}$ ។

ខ. តើបន្ទាត់ (D_1) និង បន្ទាត់ (D_2) កាត់គ្នាឬទេ ?

គេមាន $(D_1): \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$

$$(D_1):\begin{cases}x=t'\\ y=1-2t'\ ,\ t'\in\mathbb{R}\\ z=3t'\end{cases}$$

ហើយ $(D_2):\begin{cases}x=t\\ y=-1+2t\ \ ,\ t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$

បើបន្ទាត់ទាំងពីរប្រសព្វគ្នា គេបាន ៖

$$\begin{cases}t'=t & (1)\\ 1-2t'=-1+2t & (2)\\ 3t'=t & (3)\end{cases}$$

តាម (1) និង (3) ជាករណីមិនផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រមគ្នា

នាំឱ្យ បន្ទាត់ទាំងពីរគ្មានចំណុចប្រសព្វទេ

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ទាំងពីរ } (D_1) \text{ និង } (D_2) \text{ មិនកាត់គ្នាទេ}}$ ។

គ. រកចម្ងាយពីគល់តម្រុយ O ទៅប្លង់ (P)

គេមាន ប្លង់ (P): $2x+3y+z-12=0$

មាន $a=2\ ,\ b=3\ ,\ c=1\ ,\ d=-12$

ចំណុច គល់ $O(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$ នោះ: $x_0=y_0=z_0=0$

តាមរូបមន្ត $d(O,(P))=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

គេបាន $d(O\ ,(P))=\dfrac{|0+0+0-12|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{14}}=\dfrac{6\sqrt{14}}{7}$

ដូចនេះ $\boxed{d(O\ ,(P))=\dfrac{6\sqrt{14}}{7}}$ ឯកតាប្រវែង ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ២០ វិច្ឆិកា ២០០៨

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=\log\left(1-\sqrt{4-x^2}\right)$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x^2+5y^2-4xy+2x-6y+3>0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , y ជារបស់ $\mathbb{R}$ ។

គ. គេឱ្យសមីការ $x^2+ax+1=0$ ។ រកតម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា x_1 និង x_2 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1^2+x_2^2>7$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាល : $I=\int(\tan x-\cot x)^2\,dx$, $J=\int\frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង $y=x^3-x^2-2x$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលស 7 និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅ 10 ។ គេចាប់យកចេញនូវប៊ូលពីរជាមួយគ្នា ។ តើគេមានប៉ុន្មានរបៀប ដើម្បីចាប់យកប៊ូលចេញឱ្យបានយ៉ាងតិចបំផុតនូវប៊ូលសមួយ ? **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេឱ្យស្វ៊ែមួយមានប្រវែងកាំ $9\,\text{dm}$ ។ កោណមួយចារឹកក្នុងស្វ៊ែនោះ ។ រកកម្ពស់នៃកោណ ដើម្បីឱ្យកោណនោះមានមាឌ អតិបរមា ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$ និងមានខ្សែកោង (C) ។

ក. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ។ បង្ហាញថា អនុគមន៍ f មានអតិបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃអតិបរមានោះ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim_{x\to0^+}f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេក នៃខ្សែកោង (C) ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៨

I. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ :

គេមាន $y=\log\left(1-\sqrt{4-x^2}\right)$ មានន័យលុះត្រាតែ

$$\begin{cases}4-x^2\ge 0 & (1)\\ 1-\sqrt{4-x^2}>0 & (2)\end{cases}$$

តាម (1) ឱ្យ $4-x^2=0$ សមីការមានឬស $x=\pm 2$

តាម (2) ឱ្យ $1-\sqrt{4-x^2}=0$ ឬ $1=\sqrt{4-x^2}$

$4-x^2=1$ មានឬស $x=\pm\sqrt{3}$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$4-x^2\ge 0$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1-\sqrt{4-x^2}>0$				$+$	0	$-$	0	$+$			
ចម្លើយ											

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=[-2\,,\,-)\cup\left(\sqrt{3}\,,\,2\right]$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា វិសមភាពពិតគ្រប់

គេមាន $x^2+5y^2-4xy+2x-6y+3>0$

$x^2+2(1-2y)x+\left(5y^2-6y+3\right)>0$

វិសមីការនេះពិត ឬផ្ទៀងផ្ទាត់លុះត្រាតែ $\begin{cases}a>0\\ \Delta'<0\end{cases}$

គេមាន $a=1>0$

ហើយ $\Delta'=(1-2y)^2-\left(5y^2-6y+3\right)$

$=1-4y+4y^2-5y^2+6y-3$

$=-y^2+2y-2$

$=-\left(y^2-2y+1\right)-1$

$=-(y-1)^2-1<0\ ,\ \forall y\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $x^2+5y^2-4xy+2x-6y+3>0$ ពិត គ្រប់តម្លៃនៃ $x\,,\,y\in\mathbb{R}$ ។

គ. រកតម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការមានឬសពីរផ្សេងគ្នា $x_1\,,\,x_2$

គេមាន សមីការ $x^2+ax+1=0$ មាន $S=-a$, $P=1$

សមីការមានឬសពីរផ្សេងគ្នា និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1^2+x_2^2>7$

លុះត្រាតែ $\begin{cases}\Delta>0\\ x_1^2+x_2^2>7\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}a^2-4>0\\ (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-7>0\end{cases}$

គេបាន $\begin{cases}a^2-4>0\\ S^2-2P-7>0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}a^2-4>0\\ (-a)^2-2\cdot 1-7>0\end{cases}$

$$\begin{cases}a^2-4>0\\ a^2-9>0\end{cases}$$

កន្សោម a^2-4 មានឬស $a=\pm 2$

កន្សោម a^2-9 មានឬស $a=\pm 3$

តារាងសញ្ញា

a	$-\infty$		-3		-2		2		3		$+\infty$
$a^2-4>0$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$a^2-9>0$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
ចម្លើយ											

ដូចនេះ $a\in(-\infty\,,\,-3)\cup(3\,,\,+\infty)$ ។

II. គណនាអាំងតេក្រាល :

$\mathbf{I}=\int(\tan x-\cot x)^2\,dx$

$=\int\left(\tan^2x-2\tan x\cot x+\cot x\right)dx$

$=\int\left(\tan^2x-2+\cot^2x\right)dx$

$=\int\left[\left(1+\tan^2x\right)+\left(1+\cot^2x\right)-4\right]dx$

$=\tan x-\cot x-4x+c$, c ថេរ

ដូចនេះ $\mathbf{I}=\tan x-\cot x-4x+c$, c ជាចំនួនថេរ ។

$\mathbf{J}=\int\dfrac{dx}{x^2-5x+6}$ (លំហាត់ដូចប្រឡងគ្រូមធ្យម ២០០៥)

$=\int\dfrac{dx}{(x-2)(x-3)}$

$=\int\dfrac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)}\,dx$

$=\int\dfrac{1}{(x-3)}\,dx-\int\dfrac{1}{(x-2)}\,dx$

$=\ln|x-3|-\ln|x-2|+c$

$=\ln\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|+c$

ដូចនេះ $\mathbf{J}=\ln\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|+c$, c ជាចំនួនថេរ ។

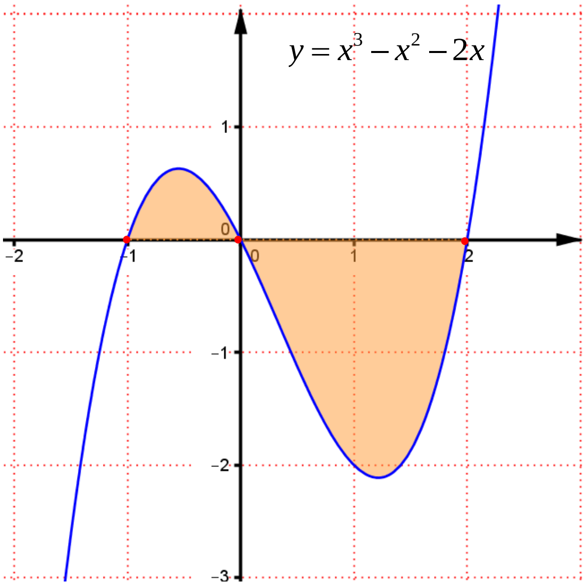
ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេមាន $y=x^3-x^2-2x$ ជាខ្សែកោង

តារាងតម្លៃលេខត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	0	0	-2	0

គេសង់ខ្សែកោងបានដូចខាងក្រោម ៖



តាមក្រាប ផ្ទៃក្រឡាមានពីរផ្នែក គេបាន ៖

$$S=\int_{-1}^{0}\left(x^3-x^2-2x\right)dx-\int_{0}^{2}\left(x^3-x^2-2x\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\left[0-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)\right]-\left[\left(4-\frac{8}{3}-4\right)-0\right]$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

ដូចនេះ: ផ្ទៃក្រឡាគណនាបាន $\boxed{S=\frac{37}{12}}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

III. រកចំនួនរបៀបយកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុត :

គេមាន ប៊ូលពណ៌ស 7 និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅ 10

ព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុតមានន័យថា

យកបានប៊ូលសមួយ ឬប៊ូលសពីរ គេបាន ៖

ចំនួនរបៀបយកបានប៊ូលសមួយយ៉ាងតិចបំផុតគឺ

$$=C(7\,,1)C(10\,,1)+C(7\,,2)$$

$$=7\times10+\frac{7!}{(7-2)!\cdot2!}=70+\frac{7\cdot6\cdot5!}{5!\cdot2}=70+21=91$$

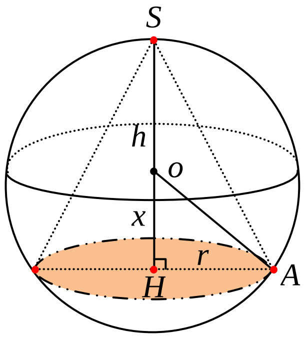
ដូចនេះ: $\boxed{\text{របៀបយកបានប៊ូលសយ៉ាងតិចមួយគឺ 91 របៀប}}$ ។

IV. រកកម្ពស់នៃកោណ ដើម្បីឱ្យកោណនោះមានមាឌ អតិបរមា :

គេតាង h ជាកម្ពស់នៃកោណ

$x=OH$ ដែល $x<9$ ហើយ $h=9+x$

r ជាកាំបាតរបស់កោណ



មាឌកោណ $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$ (តាមពីតាគ័រ $r^2=9^2-x^2$)

គេបាន $V(x)=\frac{1}{3}\pi\left(81-x^2\right)(x+9)$

$V(x)=\frac{\pi}{3}\left(-x^3-9x^2+81x+729\right)$

នាំឱ្យ $V'(x)=\frac{\pi}{3}\left(-3x^2-18x+81\right)$

$V'(x)=\pi\left(-x^2-6x+27\right)$

$V''(x)=\pi(-2x-6)$

ដើម្បីឱ្យមាឌ V អតិបរមា លុះត្រាតែ $\begin{cases}V'(x)=0\\V''(x)<0\end{cases}$

គេបាន $V'(x)=0 \Leftrightarrow \pi\left(-x^2-6x+27\right)=0$

$\Delta'=(-3)^2+27=36=6^2$

នោះ: $x=3$, $x=9$ មិនយក

ចំពោះ: $x=3:\ V''(3)=\pi(-2\cdot3-6)=-12\pi<0$ ពិត

នាំឱ្យ $h=x+9=3+9=12$ dm

ដូចនេះ: កម្ពស់កោណគឺ $\boxed{h=12\text{ dm}}$ ។

V. ក. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f :

គេមាន $x>0$, $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$ មានខ្សែកោង (C)

គេបាន $f'(x)=\frac{(x+\ln x)'x-x'(x+\ln x)}{x^2}$

$=\frac{x+1-x-\ln x}{x^2}$

$=\frac{1-\ln x}{x^2}$

ដូចនេះ: គណនាបានដេរីវេ $\boxed{f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}}$ ។

➢បង្ហាញថា f មានអតិបរមាមួយ ដែលត្រូវរក

គេឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$

ដោយ $\forall x>0$, $x^2>0$ គេបាន $1-\ln x=0$ នោះ $x=e$

គេបាន $f(e)=\dfrac{e-\ln e}{e}=\dfrac{e-1}{e}$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

ត្រង់ $x=e$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពីរ $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានតម្លៃអតិបរមាមួយស្មើនឹង $f(e)=\dfrac{e-1}{e}$ ។

ខ. គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\ln x\right)$$

$$=1+(+\infty)(-\infty)=1-\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\ln x}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)=1+0=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty}$ និង $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x)=1}$ ។

កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេក នៃខ្សែកោង (C)

ដោយ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ នៃខ្សែកោង (C) ។

ដោយ $\lim_{x\to +\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក នៃខ្សែកោង (C) ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{e-1}{e}$	↘	1

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ១៣ វិច្ឆិកា ២០០៩

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. គណនាចំនួនកុំផ្លិច $z=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2002}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2001}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យវិសមីការ $\frac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$ ចំពោះគ្រប់ x ជារបស់ $\mathbb{R}$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ចូរសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=|x|$ រួចស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=0$ និងគ្មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}$ ។ កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=a+b\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)$ រួចគណនា $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេចង់បង្កើតគណៈកម្មការមួយដែលមានសមាជិក 5 នាក់ ក្នុងចំណោមមនុស្សទាំងអស់ 15 នាក់ ។ ក្នុងចំណោមមនុស្ស ទាំងនេះមានពីរនាក់ A និង B ដែលអាចចូលជាសមាជិកគណៈកម្មការបាន លុះត្រាតែចូលទាំងពីរនាក់ ។ តើគេអាចបង្កើតគណៈកម្មការបានប៉ុន្មានរបៀប ? **(១ពិន្ទុ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យប្លង់ (P) មួយដែលកាត់តាមចំណុច $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ និង $C(0,0,3)$ ។

ក. គណនាចម្ងាយ $|OI|$ ពីគល់ O មកប្លង់ (P) ។

ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $\frac{1}{|OI|^2}=\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}+\frac{1}{|OC|^2}$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. ឱ្យអនុគមន៍មួយកំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{2x-4}$ មានខ្សែកោង (C) ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ f រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា ខ្សែកោងនេះមានផ្ចិតបំលែងឆ្លុះមួយ ។

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោង (C) ដោយដឹងថាបន្ទាត់ប៉ះនេះកាត់តាមចំណុច $A(0,2)$ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡា S នៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ $x=3$, $x=4$ ។ **(៣ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៩

I. ក. គណនាចំនួនកុំផ្លិច z :

គេមាន $z=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2002}+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2001}$

$=\left[\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right]^{1001}+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2001}$

$=\left(\dfrac{1+2i+i^2}{2}\right)^{1001}+\left(\dfrac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^{2001}$

$=i^{1001}+i^{2001}=i^{1000}\cdot i+i^{2000}\cdot i=i+i=2i$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{z=2i}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យវិសមីការ ពិតគ្រប់ x ជារបស់ $\mathbb{R}$

គេមាន $\dfrac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0 \quad (E)$

ដោយ $x^2-8x+20$ មាន $\begin{cases} a=1>0 \\ \Delta'=(-4)^2-20=-4<0 \end{cases}$

នោះ $x^2-8x+20>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

ហេតុនេះ ដើម្បីឱ្យ (E) ផ្ទៀងផ្ទាត់លុះត្រាតែវាមានភាគបែង

$mx^2+2(m+1)x+9m+4<0$

គេបាន $\begin{cases} m<0 & (1) \\ \Delta'=(m+1)^2-m(9m+4)<0 & (2) \end{cases}$

តាម (2) $m^2+2m+1-9m^2-4m<0$

$-8m^2-2m+1<0$

គេឱ្យ $-8m^2-2m+1=0$ មានឫស $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{1}{4}$

តារាងសញ្ញា

x	0 $\quad -\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{4}$ $\quad +\infty$
$-8m^2-2m+1<0$	$-$ $\;0\;$ $+$ $\;0\;$ $-$

តាមតារាង $m\in\left(-\infty\,,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4}\,,+\infty\right) \quad (3)$

យក $(1)\cap(3)$ គេបានចម្លើយ $m\in\left(-\infty\,,-\dfrac{1}{2}\right)$

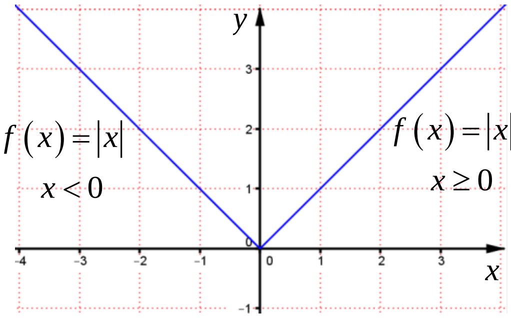
ដូចនេះ តម្លៃនៃកំណត់បានគឺ $\boxed{m<-\dfrac{1}{2}}$ ។

II. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=|x|$: (ដូចគ្រូបឋម២០០៥)

• ចំពោះ $x\geq 0$: $|x|=x$ នោះ $y=f(x)=x$

• ចំពោះ $x<0$: $|x|=-x$ នោះ $y=f(x)=-x$

គេសង់ក្រាបបាន តាមករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម ៖



➤ស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$

គេមាន $f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{បើ } x\geq 0 \\ -x & \text{បើ } x<0 \end{cases}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} (-x)=0$

$f(0)=0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ } x=0}$ ។

➤ស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ គ្មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$

បើ f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $f'_-(0)=f'_+(0)$

តាមនិយមន័យដេរីវេ $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

គេបាន $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x-0}=-1$

និង $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x-0}=1$

ដោយ $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ នោះ f គ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ទេ

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ គ្មានដេរីវេត្រង់ } x=0 \text{ ទេ}}$ ។

III. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b :

គេមាន $f(x)=a+b\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)$

$$=\frac{a\cos x+a\sin x+b\cos x-b\sin x}{\cos x+\sin x}$$

$$=\frac{(a+b)\cos x+(a-b)\sin x}{\cos x+\sin x}$$

ដោយ $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+\sin x}$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}a+b=0\\ a-b=1\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}\ ,\ b=-\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=\dfrac{1}{2}\ ,\ b=-\dfrac{1}{2}}$ ។

➤គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

ចំពោះ $a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{1}{2}$ នោះ $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)$

គេបាន $\mathbf{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)\right]dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\cos x+\sin x)'}{\cos x+\sin x}\right]dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 1\right)-\left(0-\frac{1}{2}\ln 1\right)=\frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\mathbf{I}=\dfrac{\pi}{4}}$ ។

IV. រកចំនួនរបៀបនៃគណកម្មការដែលគេអាចបង្កើតបាន :

គេជ្រើសរើស 5 នាក់ ពីមនុស្សទាំងអស់ 15 នាក់ ដែល ពីរនាក់ A និង B ចូលទាំងពីរនាក់ នោះគេបាន ចំនួនគណកម្មការបង្កើតបានអាចជា ៖

- ជ្រើសរើស 5 នាក់ពីមនុស្ស 13 នាក់ មិនមែន A,B **ឬក៏**
- ជ្រើសរើស 3 នាក់ពីមនុស្ស 13 នាក់ និង 2 នាក់ទៀតគឺជា A និង B នោះគេបានចំនួនរបៀបទាំងអស់ស្មើនឹង

$$C(13\ ,5)+C(13\ ,3)\cdot C(2\ ,2)$$

$$=\frac{13!}{8!\cdot 5!}+\frac{13!}{10!\cdot 3!}\cdot 1=1287+286=1573$$

ដូចនេះ **ចំនួនគណកម្មការអាចបង្កើតបានគឺ 1573 របៀប** ។

V. ក. គណនាចម្ងាយ $|OI|$ ពីគល់ O មកប្លង់ (P) :

គេមាន $A(1\ ,0\ ,0)$, $B(0\ ,2\ ,0)$ និង $C(0\ ,0\ ,3)$

ដោយ ប្លង់ (P) កាត់ $A\ ,B\ ,C$ នោះ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ដែល

$\overrightarrow{AB}=(-1\ ,2\ ,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1\ ,0\ ,3)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}=6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$

នោះ $a=6\ ,b=3\ ,c=2$

ហើយ ប្លង់ (P) កាត់ $A(1\ ,0\ ,0)$

$x_0=1\ ,\ y_0=0\ ,\ z_0=0$

ប្លង់ (P) រាង $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

គេបាន $(P):6(x-1)+3(y-0)+2(z-0)=0$

$(P):6x+3y+2z-6=0$

នោះ $a=6\ ,b=3\ ,c=2\ ,d=-6$

តាមរូបមន្ត $|OI|=d(O\ ,(P))=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $O(0\ ,0\ ,0)$ នោះ $x_0=y_0=z_0=0$

គេបាន $|OI|=d(O\ ,(P))=\dfrac{|-6|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\dfrac{6}{7}$

ដូចនេះ $\boxed{|OI|=\dfrac{6}{7}}$ ឯកតាប្រវែង ។

ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $\dfrac{1}{|OI|^2}=\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}$

គេមាន $\overrightarrow{OA}=(1\ ,0\ ,0)$, $\overrightarrow{OB}=(0\ ,2\ ,0)$ និង $\overrightarrow{OC}=(0\ ,0\ ,3)$

នាំឱ្យ $|OA|^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=1^2+0^2+0^2=1$

$|OB|^2=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=0^2+2^2+0^2=4$

$|OC|^2=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2=0^2+0^2+3^2=9$

គេបាន $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}$

$$=\frac{36+9+4}{36}=\frac{49}{36}=\frac{1}{\left(\frac{6}{7}\right)^2}=\frac{1}{|OI|^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{1}{|OI|^2}=\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}}$ ត្រូវបានបង្ហាញ

VI. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍

គេមាន $y=f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}$

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $2x-4\neq 0$

នាំឱ្យ $2x\neq 4$ នោះ $x\neq 2$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{2\}=(-\infty\,,\,2)\cup(2\,,\,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

ដេរីវេ $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}\right)'$

$$=\frac{(2x-2)(2x-4)-2(x^2-2x+1)}{(2x-4)^2}$$

$$=\frac{2(x-1)(2x-4)-2(x-1)^2}{(2x-4)^2}$$

$$=\frac{2(x-1)(2x-4-x+1)}{(2x-4)^2}$$

$$=\frac{2(x-1)(x-3)}{(2x-4)^2}$$

គេឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-1)(x-3)}{(2x-4)^2}=0$

$\forall x\in D\,,\ \Leftrightarrow (2x-4)^2>0$

នាំឱ្យ $(x-1)(x-3)=0$ នោះ $x=1\,,\,x=3$

គេបាន $f(1)=\dfrac{1^2-2\cdot1+1}{2\cdot1-4}=0$

$f(3)=\dfrac{(3)^2-2(3)+1}{2(3)-4}=\dfrac{4}{2}=2$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$

• ត្រង់ $x=1\,,\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(1)=0$ ។

• ត្រង់ $x=3\,,\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(3)=2$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-2x+1}{2(x-2)}=\frac{9}{2(2+0^-+2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-2x+1}{2(x-2)}=\frac{9}{2(2+0^+-2)}=+\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

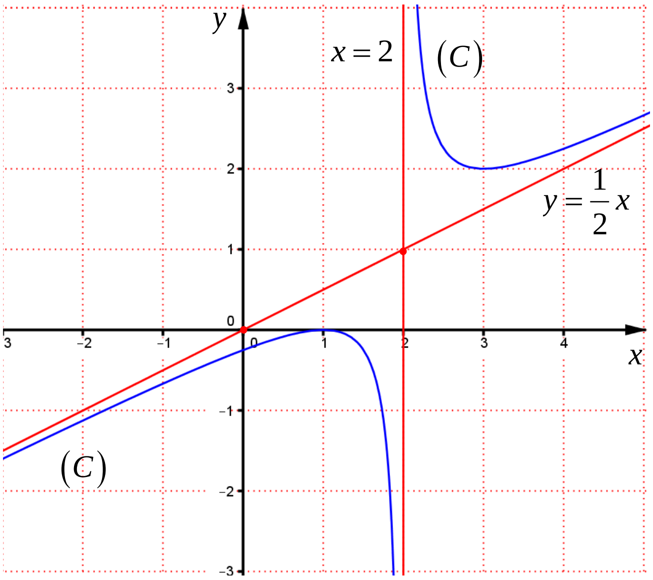
ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2x-4}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{2x-4}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=\dfrac{1}{2}x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$

➢ សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍



➢ ស្រាយថាខ្សែកោងនេះមានផ្ចិតបំលែងឆ្លុះមួយ

របៀបទី១ តាមរូបមន្ត

ដោយ អាស៊ីមតូតទាំងពីរ $x=2$ និង $y=\dfrac{1}{2}x$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $I(2\,,1)$ គេនឹងស្រាយថា I ជាផ្ចិតបំលែងឆ្លុះនៃក្រាប (C)

បើ $I(a\,,\,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C តាងអនុគមន៍ f លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(2a-x)+f(x)=2b$

គេបាន $f(4-x)+f(x)=2$

ដោយ $f(4-x)=\dfrac{(4-x)^2-2(4-x)+1}{2(4-x)-4}$

$=\dfrac{16-8x+x^2-8+2x+1}{8-2x-4}$

$=\dfrac{x^2-6x+9}{-2x+4}=\dfrac{-x^2+6x-9}{2x-4}$

គេបាន $\dfrac{-x^2+6x-9}{2x-4}+\dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}=\dfrac{4x-8}{2x-4}=2$ ពិត

ដូចនេះ ក្រាប (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយគឺ $I(2,1)$ ។

របៀបទី២ តាមវិធីរំកិលអ័ក្ស

គេបំលែងកិលអ័ក្សពីតម្រុយ xoy ទៅតម្រុយថ្មី XIY

តាមរូបមន្ត បំលែងកិលអ័ក្ស $\begin{cases} x=a+X \\ y=b+Y \end{cases}$

ដោយ អាស៊ីមតូតទាំងពីរ $x=-2$ និង $y=-\dfrac{1}{2}x+2$

ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $I(a,b)=I(2,1)$

គេបាន $\begin{cases} x=2+X \\ y=1+Y \end{cases}$

គេមាន $y=f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}$

គេបាន $Y+1=\dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}$

$Y+1=\dfrac{(2+X)^2-2(2+X)+1}{2(2+X)-4}$

$Y=\dfrac{4+4X+X^2-4-2X+1}{2X}-1$

$F(X)=\dfrac{X^2+1}{2X}$, $Y=F(X)$

ដោយ $\forall X\neq 0$ គេបាន ៖

$F(-X)=\dfrac{(-X)^2+1}{2(-X)}=-\dfrac{X^2+1}{2X}=-F(X)$

នាំឱ្យ $F(X)$ ជាអនុគមន៍សេសមាន $I(2,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ

ដូចនេះ ក្រាប (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយគឺ $I(2,1)$ ។

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $(T):\ y=ax+b$

ដោយ (T) កាត់ $A(0,2)$ នោះ $2=0\cdot a+b$ ឬ $b=2$

គេបាន $(T):\ y=ax+2$

ដោយ (T) ប៉ះ (C) គេផ្ទឹមបានសមីការអាប់ស៊ីស

$\dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}=ax+2$

$x^2-2x+1=2ax^2+4x-4ax-8$

$(1-2a)x^2+(-6+4a)x+9=0$

ដើម្បីឱ្យ (T) ប៉ះ (C) លុះត្រាសមីការមានឫសឌុប $\begin{cases} \Delta'=0 \\ a\neq 1/2 \end{cases}$

គេបាន $(-3+2a)^2-9(1-2a)=0$

$9-12a+4a^2-9+18a=0$

$4a^2+6a=0$

$2a(2a+3)=0$

នាំឱ្យ $a=0$, $a=-\dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរកបានមានពីរគឺ

$y=2$, $y=-\dfrac{3}{2}x+2$ ។

គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃ S ផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C)

អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ $x=3$, $x=4$

តាមក្រាប នៅចន្លោះ $3\le x\le 4$ ក្រាបនៅពីលើអាស៊ីមតូតទ្រេត

គេបាន ផ្ទៃកំណត់ដោយ $S=\int_3^4\left[(C)-y\right]dx$ គេបាន ៖

$$S=\int_3^4\left[\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x-4}\right)-\frac{1}{2}x\right]dx$$

$$=\int_3^4\frac{1}{2x-4}dx=\frac{1}{2}\int_3^4\frac{(x-2)'}{x-2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|x-2|\right]_3^4=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{\ln 2}{2}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃប្លង់កំណត់បាន $S=\dfrac{\ln 2}{2}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ១២ ធ្នូ ២០១០

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. គេឱ្យអនុគមន៍ $y = x\cos x$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y'' + y + 2\sin x = 0$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $4\cos^2 x - 1 = 3\cos x - 2\sin^2 x$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ប្រអប់មួយមានរាងជាប្រលេពីប៉ែតកែង ដែលមានប្រវែងទ្រនុងទាំងបីគឺ x , y , $x+y$ (គិតជា cm) ។ គេដឹងថាទ្រនុងដែលវែងជាងគេមានប្រវែង $20\,\text{cm}$ ។ កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យប្រអប់នេះមានមាឌធំបំផុត ។ **(១ពិន្ទុ)**

III. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int\left(\frac{2010}{\sqrt{x}} - \frac{2011e^x}{2+e^x}\right)dx$ និង $J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\tan x + \cot x)^2\,dx$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

IV. គេមានលេខ $0, 1, 2, 3, 4$ ។ គេយកលេខទាំងនេះទៅបង្កើតចំនួនដែលធំជាង 2000 និងក្នុងចំនួននីមួយៗគ្មានលេខដដែលពីរដងទេ ។ តើគេអាចបង្កើតចំនួនធំជាង 2000 បានប៉ុន្មាន ? **(២ពិន្ទុ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ នៃលំហ គេឱ្យចំណុច $A(1,1,1)$ និង $B(2,2,0)$ ។

ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{OA}$ ។

ខ. បន្ទាត់ (D) កាត់តាមចំណុច B ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA}$ ។ រកកូអរដោនេនៃ H ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងបន្ទាត់ (D) រួចរកចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (D) ។ **(២ពិន្ទុ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = e^x$ និង $g(x) = \ln(x+1) + 1$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា ខ្សែកោង (C_1) តាង $y = f(x)$ និង (C_2) តាង $y = g(x)$ មានចំណុចរួម $A(0,1)$ ។

ខ. គណនា $f'(0)$ និង $g'(0)$ រួចបង្ហាញថាខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ A ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះរួមរវាងខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១០

I. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y''+y+2\sin x=0$:

គេមាន $y=x\cos x$

នាំឱ្យ $y'=x'\cos x+(\cos x)'x=\cos x-x\sin x$

$y''=(\cos x)'-\left[x'\sin x+x(\sin x)'\right]$

$=-\sin x-(\sin x+x\cos x)$

$=-2\sin x-x\cos x$

គេបាន $y''+y+2\sin x$

$=(-2\sin x-x\cos x)+x\cos x+2\sin x=0$

ដូចនេះ $\boxed{y''+y+2\sin x=0}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

គេបាន $4\cos^2 x-1=3\cos x-2\sin^2 x$

$4\cos^2 x-1=3\cos x-2(1-\cos^2 x)$

$2\cos^2 x-3\cos x+1=0$

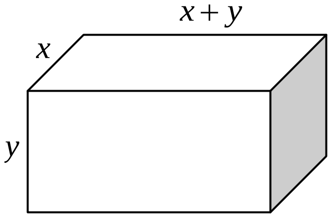
សមីការមានមានគុណ $a+b+c=0$ នោះសមីការមានឫស

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\cos 0\\ \cos x=\cos\frac{\pi}{3}\end{array}\right.$$

នាំឱ្យ $$\left[\begin{array}{l}x=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2k'\pi\ ,\ k'\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $$\boxed{\left[\begin{array}{l}x=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2k'\pi\ ,\ k'\in\mathbb{Z}\end{array}\right.}$$ ។

II. កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យប្រអប់នេះមានមាឌធំបំផុត :



គេមាន $x+y=20$

នាំឱ្យ $y=20-x$

រូបមន្តមាឌប្រអប់រាងជាប្រលេពីប៉ែតកែងគឺ ៖

$V=xy(x+y)=20xy$

$V(x)=20x(20-x)=400x-20x^2$

$V'(x)=400-40x$

$V''(x)=-40$

ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌអតិបរមាលុះត្រាតែ $\begin{cases}V'(x)=0\\ V''(x)<0\end{cases}$

គេបាន $V'(x)=0\Leftrightarrow 400-40x=0\Rightarrow x=10$

$V''(x)=-40<0$ ពិត

ចំពោះ $x=10$ នោះ $y=20-x=20-10=10$

ដូចនេះ $\boxed{x=y=10\text{ cm}}$ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាល :

$$\mathbf{I}=\int\left(\frac{2010}{\sqrt{x}}-\frac{2011e^x}{2+e^x}\right)dx$$

$$=\int\left(2010x^{-\frac{1}{2}}-2011\frac{(2+e^x)'}{2+e^x}\right)dx$$

$$=2010\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-2011\ln(2+e^x)+c\ ,\ c\text{ ថេរ}$$

$$=\boxed{4020\sqrt{x}-2011\ln(2+e^x)+c\ ,\ c\text{ ថេរ}}$$

$$\mathbf{J}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+\cot x)^2\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^2 x+2\tan x\cot x+\cot^2 x\right)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2 x+1+\cot^2 x\right)dx=\left[\tan x-\cot x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\tan\frac{\pi}{4}-\cot\frac{\pi}{4}\right]-\left[\tan\frac{\pi}{6}-\cot\frac{\pi}{6}\right]$$

$$=(1-1)-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right)=\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

IV. រកចំនួនដែលបង្កើតបានធំជាង 2000 : (ដូចគ្រូមធ្យម២០០៥)

ដោយលេខតាមខ្ទង់ដែលត្រូវប្រើមាន៥លេខ 0 , 1 , 2 , 3 , 4

នោះចំនួនដែលធំជាង 2000 អាចជាលេខ 4 ខ្ទង់ ឬ 5 ខ្ទង់

• ចំពោះលេខ 4 ខ្ទង់ដែលធំជាង 2000 គឺ

ខ្ទង់ពាន់ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់រយ មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់ដប់ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់រាយ មាន 2 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ផលគុណ $3\times4\times3\times2=72$ ចំនួន

• ចំពោះលេខ 5 ខ្ទង់ដែលធំជាង 2000 គឺ

ខ្ទង់ម៉ឺន មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់ពាន់ មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់រយ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់ដប់ មាន 2 ជម្រើស

ខ្ទង់រាយ មាន 1 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ផលគុណ $4\times4\times3\times2\times1=96$ ចំនួន

សរុបចំនួនដែលធំជាង $2000=72+96=168$ ចំនួន

ដូចនេះ ចំនួនដែលអាចបង្កើតបានមាន 168 ចំនួន ។

V. ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P) :

ប្លង់រាង $(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ (P) កាត់តាមចំណុច $A(1,1,1)$

នោះ $x_0=1,\ y_0=1,\ z_0=1$

ហើយ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{OA}=(1,1,1)$

នោះ $a=1, b=1, c=1$

នាំឱ្យ $(P):(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$

$(P): x+y+z-3=0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ $(P): x+y+z-3=0$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃ H ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងបន្ទាត់ (D)

បន្ទាត់រាង $(D):\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt\ ,\ t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+ct \end{cases}$

ដោយ (D) កាត់តាមចំណុច $B(2,2,0)$

នោះ $x_0=2,\ y_0=2,\ z_0=0$

ហើយ (D) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{OA}=(1,1,1)$

នោះ $a=1, b=1, c=1$

នាំឱ្យ $(D):\begin{cases} x=2+t \\ y=2+t\ ,\ t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

គេមាន $(P): x+y+z-3=0$

គេបាន $(2+t)+(2+t)+t-3=0$ នោះ $t=-\dfrac{1}{3}$

នាំឱ្យ $H:\left(x=y=2-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}\ ,\ z=-\dfrac{1}{3}\right)$

ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វ $H\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ ។

រួចរកចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (D)

រូបមន្ត $d(A,(D))=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{OA}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|}$

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(1,1-1)$ និង $\overrightarrow{OA}=(1,1,1)$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{OA}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\vec{i}-2\vec{j}+0\vec{k}$

នាំឱ្យ $d(A,(D))=\dfrac{\sqrt{2^2+2^2+0^2}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

ដូចនេះ $d(A,(D))=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ ឯកតាប្រវែង ។

VI. ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា (C_1) និង (C_2) មានចំណុចរួម $A(0,1)$:

គេមាន $(C_1): f(x)=e^x$

$(C_2): g(x)=\ln(x+1)+1$

ចំពោះ $A(0,1)$ គេបាន $(C_1): 1=e^0$ ពិត

នោះខ្សែកោង (C_1) កាត់ចំណុច $A(0,1)$

ចំពោះ $A(0,1)$ គេបាន $(C_2): 1=\ln(0+1)+1$ ពិត

នោះខ្សែកោង (C_2) កាត់ចំណុច $A(0,1)$

ដូចនេះ (C_1) និង (C_2) មានចំណុចរួម $A(0,1)$ ។

ខ. គណនា $f'(0)$ និង $g'(0)$

គេមាន $f(x)=e^x$ នោះ $f'(x)=e^x$

នាំឱ្យ $f'(0)=e^0=1$

ហើយ $g(x)=\ln(x+1)+1$

នោះ $g'(x)=\dfrac{(x+1)'}{(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}$

នាំឱ្យ $g'(0)=\dfrac{1}{0+1}=1$

ដូចនេះ គណនាបាន $f'(0)=1\ ,\ g'(0)=1$ ។

បង្ហាញថាខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ A

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ត្រង់ចំណុច $A(0,1)$ មានតម្លៃស្មើគ្នាគឺ $f'(0)=g'(0)=1$

នាំឱ្យ ខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) មានបន្ទាត់ប៉ះរួមត្រង់ A

ដូចនេះ ខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ A ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះរួមរវាងខ្សែកោង (C_1) និង (C_2)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

ដោយ (T) កាត់តាមចំណុច $A(0\,,1)$

នោះ $x_0 = 0$, $f(x_0) = 1$

ហើយ (T) មានមេគុណប្រាប់ទិស $f'(x_0) = f'(0) = 1$

គេបាន $(T): y = 1(x - 0) + 1$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះរួមនៃខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ត្រង់ A គឺ

$\boxed{(T): y = x + 1}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ១៨ វិច្ឆិកា ២០១១

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ ។

ក. គណនា Z^5 រួចទាញរកតម្លៃនៃ $1+Z+Z^2+Z^3+Z^4$ ។

ខ. សរសេរ $(1+Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

II. គេឱ្យសមីការ $(m+1)x^2-2mx+4(m+1)=0$ ។ កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫស x_1 និង x_2 ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1<-1<x_2<1$ ។

III. រង្វង់មួយ និងការេមួយមានផលបូកប្រវែងបរិមាត្រស្មើនឹង 16 m ។ រកប្រវែងកាំរបស់រង្វង់ និងជ្រុងរបស់ការេ ដើម្បីឱ្យផលបូកផ្ទៃក្រឡារង្វង់ និងផ្ទៃក្រឡាការេមានតម្លៃអប្បរមា ។

IV. គេប្រមៀលប៊ូលដែលមានសរសេរលេខ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 តម្រង់ទៅរន្ធ 6 ដែលមានសរសេរលេខ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 ដែរ ។ គេឧបមាថាប៊ូលទាំង 6 ចូលរន្ធទាំង 6 ខុសៗគ្នាជានិច្ច ។

ក. គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យប៊ូលលេខ 3 ចូលរន្ធលេខ 3 ។

ខ. គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យប៊ូលនីមួយៗចូលរន្ធ ដែលមានលេខដូចរបស់វា ។

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,1,0)$, $B(0,0,2)$, $C(1,-2,3)$ និង $D(1,-2,0)$ ។ រកសមីការស្វ៊ែដែលកាត់តាមចំណុច A , B , C និង D ។

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ae^x+b$ មានខ្សែកោង (C) ។

ក. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) កាត់តាមគល់ O នៃតម្រុយអរតូណរមេ និងបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុចនោះជាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ ចំពោះតម្លៃ a និង b ដែលរកឃើញ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ $x=-1$ និង $x=1$ ។

ឃ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច $x=1$ ។

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១១

I. ក. គណនា Z^5 :

គេមាន $Z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

តាមដឺម័រ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

គេបាន $Z^5=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$

$$=\cos\left(5\cdot\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(5\cdot\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$$
$$=\cos 0+i\sin 0$$
$$=1+0i$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{Z^5=1}$ ។

➢ទាញរកតម្លៃនៃ $1+Z+Z^2+Z^3+Z^4$

តាមរូបមន្ត $1-Z^5=(1-Z)(1+Z+Z^2+Z^3+Z^4)$

គេបាន $(1-Z)(1+Z+Z^2+Z^3+Z^4)=1-1=0$

ដោយ $1-Z=1-\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\neq 0$

នាំឱ្យ $1+Z+Z^2+Z^3+Z^4=0$

ដូចនេះ $\boxed{1+Z+Z^2+Z^3+Z^4=0}$ ។

ខ. សរសេរ $(1+Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $1+Z=1+\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

$$=2\cos^2\frac{\pi}{5}+i2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$$
$$=2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

នាំឱ្យ $(1+Z)^4=\left[2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^4$

$$=16\cos^4\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$$

ដូចនេះ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រសរសេរបានគឺ

$$\boxed{(1+Z)^4=16\cos^4\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)}$$ ។

II. កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1<-1<x_2<1$

គេមាន សមីការ $(m+1)x^2-2mx+4(m+1)=0$

គេតាង $f_m(x)=(m+1)x^2-2mx+4(m+1)$

ដើម្បីឱ្យ $f_m(x)$ មានឫស x_1 និង x_2 ផ្ទៀងផ្ទាត់

$x_1<-1<x_2<1$ លុះត្រាតែ ៖

$$\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta'>0\\ af(-1)<0\\ af(1)>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}m+1\neq 0\\ m^2-(m+1)^2>0\\ (m+1)(m+1+2m+4m+4)<0\\ (m+1)(m+1-2m+4m+4)>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}m\neq -1\\ m^2-m^2-2m-1>0\\ (m+1)(7m+5)<0\\ (m+1)(3m+5)>0\end{cases} \text{ នាំឱ្យ } \begin{cases}m\neq -1\\ 2m+1<0\\ (m+1)(7m+5)<0\\ (m+1)(3m+5)>0\end{cases}$$

គេបាន $2m+1$ មានឫស $m=-\frac{1}{2}$

$(m+1)(7m+5)$ មានឫស $m=-1\,,\,m=-\frac{5}{7}$

$(m+1)(3m+5)$ មានឫស $m=-1\,,\,m=-\frac{5}{3}$

តារាងសញ្ញា 0

m	$-\infty$ $-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$m+1\neq 0$	-	-	+	+	+
$2m+1<0$	-	-	-	- 0	+
$(m+1)(7m+5)<0$	+	+ 0	- 0	+	+
$(m+1)(3m+5)>0$	+ 0	- 0	+	+	+
ចម្លើយ					

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $\boxed{m\in\left(-1\,,\,-\frac{5}{7}\right)}$ ។

III. រកប្រវែងកាំរបស់រង្វង់ និងជ្រុងរបស់ការេ

គេតាង a ជាជ្រុងនៃការេ និង r ជាកាំនៃរង្វង់ , $a, r>0$

គេមាន បរិមាត្ររង្វង់ + បរិមាត្រការេ $=16$

គេបាន $2\pi r+4a=16$ នាំឱ្យ $a=4-\dfrac{\pi}{2}r$

ផលបូកផ្ទៃក្រឡារង្វង់ និងការេគឺ $S=\pi r^2+a^2$

គេបាន $S(r)=\pi r^2+\left(4-\dfrac{\pi}{2}r\right)^2$

$$=\pi r^2+16-4\pi r+\frac{\pi^2}{4}r^2$$

$$=\left(\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)r^2-4\pi r+16$$

នាំឱ្យ $S'(r)=2\left(\pi+\dfrac{\pi^2}{4}\right)r-4\pi$

$S''(r)=2\left(\pi+\dfrac{\pi^2}{4}\right)$

ដើម្បីឱ្យ S មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ $\begin{cases}S'(r)=0\\S''(r)>0\end{cases}$

គេបាន $S'(r)=0 \Leftrightarrow 2\left(\pi+\dfrac{\pi^2}{4}\right)r-4\pi=0$

$$\left(\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)r=2\pi$$

$$\frac{4+\pi}{4}r=2 \Rightarrow r=\frac{8}{4+\pi}$$

ហើយ $S''(r)=2\left(\pi+\dfrac{\pi^2}{4}\right)>0$ ពិត

នាំឱ្យ $a=4-\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{8}{4+\pi}=4-\dfrac{4\pi}{4+\pi}=\dfrac{16}{4+\pi}$

ដូចនេះ $\boxed{r=\dfrac{8}{4+\pi}\ ,\ a=\dfrac{16}{4+\pi}}$ ឯកតាប្រវែង ។

IV. ក. គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យប៊ូលលេខ 3 ចូលរន្ធលេខ 3

គេមាន រន្ធ 6 ដែលសរសេរលេខ $1,2,3,4,5,6$

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច $n(S)=6$

ហើយ ប៊ូលទាំងអស់ $1,2,3,4,5,6$ មានប៊ូលលេខ 3 ចំនួន 1 នាំឱ្យ ចំនួនករណីស្រប $n(A)=1$

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{1}{6}$

ដូចនេះ ប្រូបាបប៊ូលលេខ 3 ចូលរន្ធលេខ 3 គឺ $\boxed{P(A)=\dfrac{1}{6}}$

ខ. គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យប៊ូលនីមួយៗចូលរន្ធដែលមានលេខដូចរបស់វា

ដោយ ប៊ូលមាន 6 ចូលរន្ធទាំង 6 ខុសៗគ្នាជានិច្ច

គេបាន ចំនួនករណីអាច $n(S)=P(6\,,6)$ ដែល

$P(6\,,6)=\dfrac{6!}{(6-6)!}=6!=720$ របៀប

ហើយ ចំនួនករណីដែលប៊ូលនីមួយៗចូលរន្ធ ដែលមានលេខដូចរបស់វាមានមួយករណី នោះ $n(B)=1$

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{1}{720}$

ដូចនេះ ប្រូបាបប៊ូលចូលរន្ធដូចលេខរបស់វា $\boxed{P(B)=\dfrac{1}{720}}$ ។

V. រកសមីការស្វ៊ែដែលកាត់តាម 4 ចំណុច : (ដូចគ្រូអនុ. 2006)

គេមាន $A(1\,,1\,,0)\,,B(0,\,2\,,2)\,,$

$C(1,-2,\,3)$ និង $D(1\,,-2\,,0)$

សមីការស្វ៊ែរាង $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

$(S)\cap A$ គេបាន $(1-a)^2+(1-b)^2+c^2=r^2\ (1)$

$(S)\cap B$ គេបាន $a^2+(2-b)^2+(2-c)^2=r^2\ (2)$

$(S)\cap C$ គេបាន $(1-a)^2+(2+b)^2+(3-c)^2=r^2\ (3)$

$(S)\cap D$ គេបាន $(1-a)^2+(2+b)^2+c^2=r^2\ (4)$

គេយក $(3)-(4)$ គេបាន $(3-c)^2-c^2=0$

$(3-c-c)(3-c+c)=0 \Rightarrow c=\dfrac{3}{2}$

គេយក $(1)-(4)$ គេបាន $(1-b)^2-(2+b)^2=0$

$(1-b+2+b)(1-b-2-b)=0 \Rightarrow b=-\dfrac{1}{2}$

តាម(2) $a^2+\left(2+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(2-\dfrac{3}{2}\right)^2=r^2$

$a^2+\dfrac{25}{4}+\dfrac{1}{4}=r^2$ នោះ $a^2+\dfrac{13}{2}=r^2\ (5)$

តាម(1) $(1-a)^2+\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=r^2$

$1-2a+a^2+\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{4}=r^2 \Leftrightarrow -2a+a^2+\dfrac{11}{2}=r^2\ (6)$

យក $(5)-(6)$ $2a+1=0$ នាំឱ្យ $a=-\dfrac{1}{2}$

តាម (5) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{13}{2}=r^2$ នាំឱ្យ $r^2=\dfrac{27}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{(S):\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{27}{4}}$ ។

VI. ក. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b

គេមាន $f(x)=ae^x+b$ មានខ្សែកោង (C)

$f'(x)=ae^x$

ដោយ ខ្សែកោងកាត់គល់ O និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចនោះ

មានសមីការ $y=x$

គេបាន $\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae^0+b=0 \\ ae^0=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=1\,,\,b=-1}$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

ចំពោះ $a=1\,,\,b=-1$ គេបាន $f(x)=e^x-1$

• ដែនកំណត់ : ដោយ f មានន័យគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty\,,+\infty)}$

• ទិសដៅអថេរភាព :

ដេរីវេ $f'(x)=ae^x=e^x$

ដោយ $e^x>0\,,\forall x\in\mathbb{R}$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើន

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

• បរមា : ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$

នោះ f គ្មានបរមានទេ ។

• លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-1)=+\infty-1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-1)=0-1=-1$

• អាស៊ីមតូត :

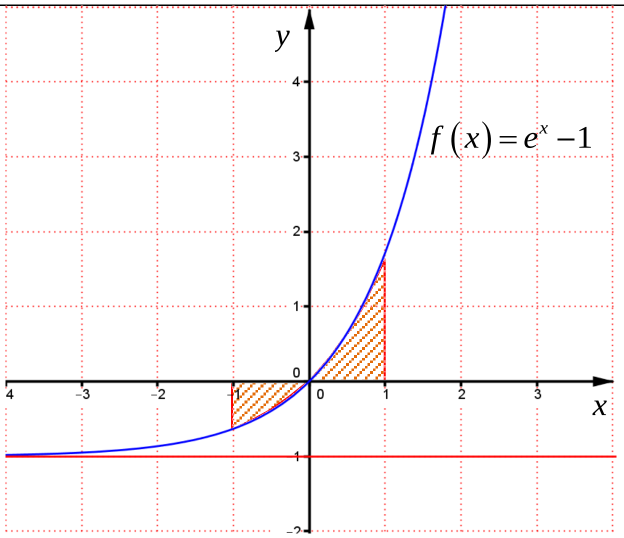
ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=-1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ខាង $-\infty$ ។

• តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow +\infty$

• សង់ក្រាប :



គ. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ $x=-1$ និង $x=1$

តាមក្រាបនៅចន្លោះ $-1\le x\le 1$ មានផ្ទៃក្រឡាពីរផ្នែកគឺ

• ចន្លោះ $-1\le x\le 0$ ក្រាប C នៅខាងក្រោមអ័ក្សអាប់ស៊ីស

• ចន្លោះ $0\le x\le 1$ ក្រាប C នៅខាងលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេបាន $S=-\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx$

$=-\int_{-1}^{0}(e^x-1)dx+\int_{0}^{1}(e^x-1)dx$

$=-\left[e^x-x\right]_{-1}^{0}+\left[e^x-x\right]_{0}^{1}$

$=-\left[(e^0-0)-(e^{-1}+1)\right]+\left[(e^1-1)-(e^0-0)\right]$

$=-\left[1-\frac{1}{e}-1\right]+\left[e-1-1\right]$

$=\frac{1}{e}+e-2$

ដូចនេះ $\boxed{S=\frac{1}{e}+e-2}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

ឃ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច $x=1$

បន្ទាត់ប៉ះមានរាង $T: y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ដោយ បន្ទាត់ T ប៉ះក្រាប C ត្រង់ $x=1$ នោះ $x_0=1$

$f'(x_0)=f'(1)=e^1=e$

$f(x_0)=f(1)=e^1-1=e-1$

នាំឱ្យ $T: y=e(x-1)+(e-1)$

$y=ex-e+e-1=ex-1$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $\boxed{T: y=ex-1}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ២៣ វិច្ឆិកា ២០១២

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. គេឱ្យ z ជាចំនួនកុំផ្លិច ដែល $z=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួច z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. គណនា $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

II. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}$ ចំពោះ $x\neq 0$ ហើយមាន $f(0)=\ln\left(\sqrt{a}\right)$ ។

កំណត់តម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

III. ក្នុងប្រអប់មួយមានឃ្លីពណ៌ខៀវ 7 គ្រាប់ និងពណ៌ក្រហម 5 គ្រាប់ ។ គេចាប់យកឃ្លី 4 គ្រាប់ដោយចៃដន្យ ។

ក. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ឃៀវទាំង 4 គ្រាប់ ។

ខ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវ 3 និងឃ្លីពណ៌ក្រហម 1 ។

គ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមយ៉ាងតិច 1 ។

IV. ប្រអប់មួយមានរាងជាប្រលេពីប៉ែតកែងដែលមានវិមាត្រ x , $2x$ និង h គិតជាម៉ែត្រ ហើយមានផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់ 1m^2 ។

ក. គណនា h ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ខ. គណនាមាឌប្រអប់ជាអនុគមន៍នៃ x ។ កំណត់តម្លៃនៃ x ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុត ។

V. ក្នុងតម្រុយ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ មាន $A(2,0,1)$, $B(0,1,-3)$ និង $C(1,2,0)$ ។

ក. គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។

VI. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=x+2+\frac{4}{x-1}$ មានក្រាបតំណាង (C) ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ ។ បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាមួយ និងអប្បបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃបរមាទាំងនោះ ។

ខ. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

គ. សិក្សាទីតាំងរវាង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

ឃ. សង់តាងអថេរភាពនៃក្រាប (C) ។

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១២

I. **ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត :**

គេមាន $z=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{6}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}i^2$

$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{z=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i}$ ។

➤សរសេរ z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$

នាំឱ្យ $z^2=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

ដូចនេះ $\boxed{z^2=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]}$ ។

ខ. គណនា $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$

គេមាន $z=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$

និង $z=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$

$=2\cos\frac{5\pi}{12}-i2\sin\frac{5\pi}{12}$

គេផ្ទឹមផ្នែកពិត និងផ្នែកពិត រួចផ្នែកនិមិត្ត និងផ្នែកនិមិត្ត

$\begin{cases}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=2\cos\frac{5\pi}{12}\\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=2\cos\frac{5\pi}{12}\end{cases}$ នោះ $\begin{cases}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ ,\ \sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ ។

II. **កំណត់តម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=0$:**

គេមាន $f(x)=\frac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}$ ចំពោះ $x\neq 0$

ហើយ $f(0)=\ln\left(\sqrt{a}\right)$

ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ វាផ្ទៀងផ្ទាត់

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}=\ln\sqrt{a}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}+1}{x-\frac{\sin^2 x}{x^2}}=\ln\sqrt{a}$

$\frac{1+1}{0-1}=\frac{1}{2}\ln a$

$-4=\ln a \quad\Rightarrow\quad a=e^{-4}=\frac{1}{e^4}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=e^{-4}=\frac{1}{e^4}}$ ។

III. គេមាន ឃ្លីខៀវ 7 និងក្រហម 5 ហើយគេចាប់យក 4 គ្រាប់

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច គឺ $n(s)=C(12\ ,\ 5)$ ដែល

$C(12\ ,\ 4)=\frac{12!}{(12-4)!\cdot 4!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8!}{8!\cdot 4!}=495$

ក. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវទាំង 4 គ្រាប់ :

ចំនួនករណីស្របតាងដោយ $n(A)=C(7,\ 4)$ ដែល

$C(7,\ 4)=\frac{7!}{(7-4)!\cdot 3!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3!\cdot 4!}=35$

នាំឱ្យ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{35}{495}=\frac{7}{99}$

ដូចនេះ ប្រូបាបចាប់បានឃ្លីខៀវទាំង 4 គឺ $\boxed{P(A)=\frac{35}{99}}$ ។

ខ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវ 3 និងឃ្លីពណ៌ក្រហម1

ចំនួនករណីស្របតាងដោយ $n(B)=C(7,3)\times C(5,1)$

$$C(7,3)\times C(5,1)=\frac{7!}{4!\,3!}\times 5=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\,3!}\times 5=175$$

នាំឱ្យ $P(B)=\frac{175}{495}=\frac{35}{99}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{35}{99}}$ ។

គ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមយ៉ាងតិច 1

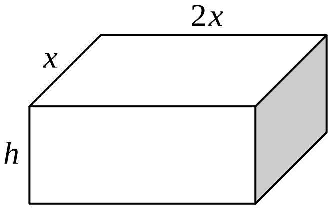
តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីក្រហមយ៉ាងតិច 1

ដោយ C ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនឹងព្រឹត្តិការណ៍ A

គេបាន $P(C)=1-P(A)=1-\frac{35}{99}=\frac{65}{99}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\frac{65}{99}}$ ។

IV. ក. គណនា h ជាអនុគមន៍នៃ x :



ផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់ តាងដោយ S_t ដែល

$S_t=2(x\cdot 2x+x\cdot h+2x\cdot h)=4x^2+6xh$

តែតាមបម្រាប់ $S_t=1\text{ m}^2$

គេបាន $4x^2+6xh=1$ នាំឱ្យ $h=\frac{1-4x^2}{6x}\ (\text{m})$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{h=\frac{1-4x^2}{6x}\ (\text{m})}$ ។

ខ. គណនាមាឌប្រអប់ជាអនុគមន៍នៃ x

មាឌប្រអប់ $V=x\cdot 2x\cdot h=2x^2h$

$$V(x)=2x^2\cdot\frac{1-4x^2}{6x}=\frac{1}{3}(x-4x^3)$$

ដូចនេះ $\boxed{V(x)=\frac{1}{3}(x-4x^3)\quad (\text{m}^3)}$ ។

➢កំណត់តម្លៃនៃ x ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុត

គេមាន $V(x)=\frac{1}{3}(x-4x^3)$

នាំឱ្យ $V'(x)=\frac{1}{3}(1-12x^2)$ និង $V'(x)=-8x$

ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុតលុះត្រាតែ $\begin{cases}V'(x)=0\\ V''(x)<0\end{cases}$

ឱ្យ $V'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(1-12x^2)=0$ នោះ $x=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$

ចំពោះ $x=-\frac{1}{2\sqrt{3}}<0$ មិនយក

ចំពោះ $x=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$: $V''\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=-8\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}<0$ ពិត

ដូចនេះ តម្លៃនៃ x គណនាបានគឺ $\boxed{x=\frac{\sqrt{3}}{6}\ (\text{m})}$ ។

V. ក. គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

គេមាន $A(2,0,1)$, $B(0,1,-3)$ និង $C(1,2,0)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=(-2,1,-4)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,2,-1)$

គេបាន $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & -4\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=7\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=7\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

ដោយ $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{7^2+2^2+(-3)^2}=\frac{\sqrt{62}}{2}$

ដូចនេះ ផ្ទៃត្រីកោណ ABC គឺ $\boxed{S=\frac{\sqrt{62}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

VI. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f :

គេមាន $f(x)=x+2+\frac{4}{x-1}$ មានក្រាប (C)

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x-1\neq 0$ នោះ $x\neq 1$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)}$ ។

➢គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

ដោយ $f(x)=x+2+\frac{4}{x-1}$

នាំឱ្យ $f'(x)=1-\frac{4}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2}$

$$f'(x)=\frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}}$ ។

ឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}=0$, $(x-1)^2>0$

នោះ $(x-3)(x+1)=0$ នោះ $x=-1$, $x=3$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$

ដូចនេះ $f'(x)>0$ កាលណា $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

$f'(x)=0$ ចំពោះ $x=-1$, $x=3$

$f'(x)<0$ កាលណា $x\in(-1,1)\cup(1,3)$

➢ **បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាមួយ និងអប្បបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃបរមាទាំងនោះ**

• ត្រង់ $x=-1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាមួយស្មើ $f(-1)$ ដែល

$$f(-1)=-1+2+\frac{4}{-1-1}=-1 \text{ ។}$$

• ត្រង់ $x=3$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាមួយស្មើ $f(3)$ ដែល

$$f(3)=3+2+\frac{4}{3-1}=7 \text{ ។}$$

ខ. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប (C)

គេមាន $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)=1+2+\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)=1+2+\frac{4}{0^+}=+\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ នៃក្រាប (C) ។

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x+2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

គ. សិក្សាទីតាំងរវាង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

សិក្សាផលដករវាង សមីការ $f(x)$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត y

$$f(x)-y=\left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)-(x+2)=\frac{4}{x-1}$$

• បើ $x<1$ នោះ $\dfrac{4}{x-1}<0$ មានន័យថា $f(x)-y<0$ គេបានក្រាប (C) នៅពីខាងក្រោមបន្ទាត់អាស៊ីមតូតទ្រេត ។

• បើ $x>1$ នោះ $\dfrac{4}{x-1}>0$ មានន័យថា $f(x)-y>0$ គេបានក្រាប (C) នៅពីខាងលើបន្ទាត់អាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃក្រាប (C)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)=-\infty+2+0=-\infty$$

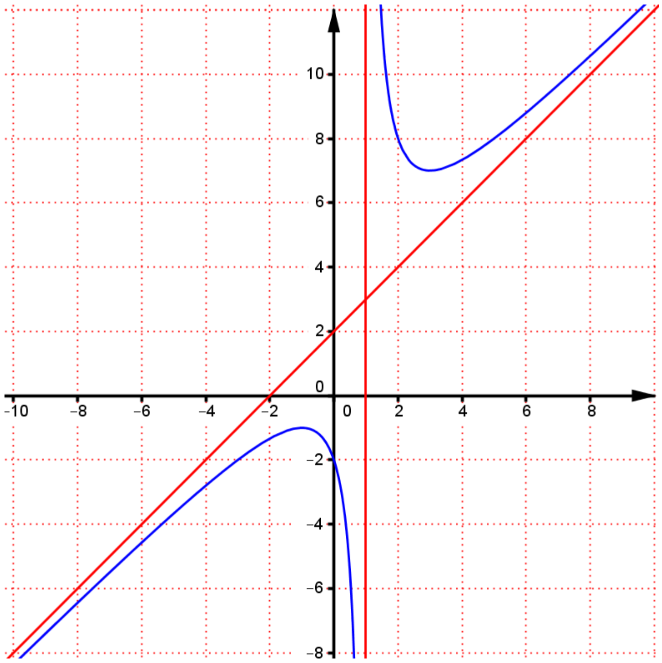
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)=+\infty+2+0=+\infty$$

តារាងអថេរភាពនៃក្រាប (C)

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	7	↗ $+\infty$

ចប់ត្រឹមនេះ

ខ្ញុំសូមបន្ថែមក្រាបដើម្បីធ្វើការផ្ទៀងផ្ទាត់



ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ២១ វិច្ឆិកា ២០១៣

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $\int \frac{x^{2001}}{\left(1+x^2\right)^{1002}}dx$ **(កន្លះពិន្ទុ)**

ខ. $\int \frac{3x-11}{x^2-6x+9}dx$ **(កន្លះពិន្ទុ)** ។

II. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^2+2x$ និង $g(x)=-x+4$ ។ គណនាមាឌនៃសូលីតបរិវត្តដែលកំណត់ដោយរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$ នៃផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

III. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2-3x+4}{2x-2}$

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

ខ. $M(x_0, y_0)$ ជាចំណុចមួយនៅលើក្រាប (C) ។ បន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច M ហើយកាត់បន្ទាត់អាស៊ីមតូតឈរត្រង់ចំណុច A និងអាស៊ីមតូតទ្រេតត្រង់ B ។

១. ចូរសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (d) ។ **(១ ពិន្ទុ)**

២. រកកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B រួចបង្ហាញថា M ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

IV. គេមានប៉ារ៉ាបូលមួយ មានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ ជាគល់នៃអ័ក្ស និងកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ ដោយដឹងថាក្រាបរបស់វាកាត់ចំណុច $A_1(-2,4)$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

ខ. រកតម្លៃនៃ y_2 បើចំណុច $A_2(-3, y_2)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនោះ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

គ. ចូរសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) របស់ប៉ារ៉ាបូល ។ **(១ ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១៣

I. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $$\int \frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}}dx = \int \frac{x}{(1+x^2)^2} \times \frac{x^{2000}}{(1+x^2)^{1000}}dx$$

$$= \int \frac{x}{(1+x^2)^2} \times \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{1000} dx \quad (1)$$

គេតាង $t = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

នាំឱ្យ $$dt = \frac{(x^2)'(1+x^2)-(1+x^2)'x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= \frac{2x+2x^3-2x^3}{(1+x^2)^2}dx = \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx$$

នោះ (1) អាចសរសេរ

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(1+x^2)^2} \times \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{1000} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{1000}dt = \frac{1}{2} \times \frac{t^{1001}}{1001} + c$$

$$= \frac{1}{2002}t^{1001} + c = \frac{1}{2002}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{1001} + c$$, ថេរ

ដូចនេះ $$\boxed{\int \frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}}dx = \frac{1}{2002}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{1001} + c \text{ , ថេរ}}$$ ។

ខ. $$\int \frac{3x-11}{x^2-6x+9}dx = \int \frac{3x-9-2}{(x-3)^2}dx$$

$$= 3\int \frac{1}{(x-3)}dx - 2\int \frac{1}{(x-3)^2}dx$$

$$= 3\ln|x-3| + c_1 + 2\cdot\frac{1}{(x-3)} + c_2$$

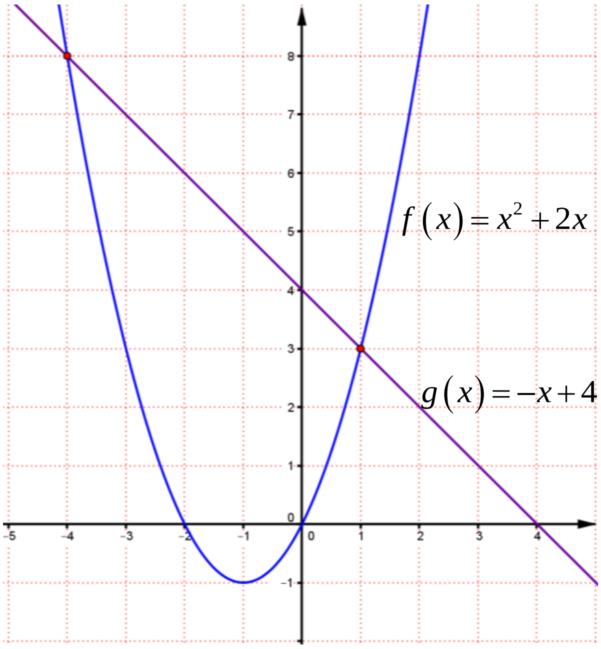
$$= 3\ln|x-3| + \frac{2}{(x-3)} + c \quad , \quad c_1 + c_2 = c$$ ថេរ

ដូចនេះ $$\boxed{\int \frac{3x-11}{x^2-6x+9}dx = 3\ln|x-3| + \frac{2}{(x-3)} + c}$$ ។

II. គណនាមាឌនៃសូលីតបរិវត្ត :

គេមាន $f(x) = x^2 + 2x$ និង $g(x) = -x + 4$

គេសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរដើម្បីរកមើលចំណុចប្រសព្វ



ផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងទាំងពីរនៅចន្លោះ $[-4\ ,1]$ នោះគេបាន មាឌនៃសូលីតបរិវត្តដែលកំណត់ដោយរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស នៃផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ គឺ

$$V = \pi\int_a^b [g(x)]^2 dx - \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$= \pi\int_a^b (-x+4)^2 dx - \pi\int_a^b (x^2+2x)^2 dx$$

$$= \pi\int_{-4}^1 (x^2-8x+16)dx - \pi\int_{-4}^1 (x^4+4x^3+4x^2)dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x\right]_{-4}^1 - \pi\left[\frac{x^5}{5} + x^4 + \frac{4x^3}{3}\right]_{-4}^1$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x - \frac{x^5}{5} - x^4 - \frac{4x^3}{3}\right]_{-4}^1$$

$$= \pi\left[-\frac{x^5}{5} - x^4 - x^3 - 4x^2 + 16x\right]_{-4}^1$$

$$= \pi\left[\left(-\frac{1}{5} - 1 - 1 - 4 + 16\right) - \left(\frac{1024}{5} - 256 + 64 - 64 - 64\right)\right]$$

$$= \pi\left[\left(10 - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1024}{5} - 320\right)\right]$$

$$= \pi\left(330 - \frac{1025}{5}\right) = \pi(330 - 205) = 125\pi$$

ដូចនេះ មាឌសូលីត $\boxed{V = 125\pi}$ ។

III. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$:

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{2x-2}$

• ដែនកំណត់ :

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $2x-2\neq 0$ ឬ $x\neq 1$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty\,,1)\cup(1\,,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព :

ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(2x-3)(2x-2)-2(x^2-3x+4)}{(2x-2)^2}$

$$=\frac{4x^2-4x-6x+6-2x^2+6x-8}{4(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-4x-2}{4(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{2(x-1)^2}$$

ចំពោះ $\forall x\in D$ ឱ្យ $f'(x)=0$ សមមូល $\dfrac{x^2-2x-1}{2(x-1)^2}=0$

នាំឱ្យ $x^2-2x-1=0$

$x^2-2x+1=2$

$(x-1)^2=2 \quad\Rightarrow\quad x=1\pm\sqrt{2}$

គេបាន $f\left(1-\sqrt{2}\right)=\dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2-3\left(1-\sqrt{2}\right)+4}{2\left(1-\sqrt{2}\right)-2}$

$$=\frac{3-2\sqrt{2}-3+3\sqrt{2}+4}{-2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{4+\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}=-\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

$f\left(1+\sqrt{2}\right)=\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-3\left(1+\sqrt{2}\right)+4}{2\left(1+\sqrt{2}\right)-2}$

$$=\frac{3+2\sqrt{2}-3-3\sqrt{2}+4}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{4-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$

• ត្រង់ $x=1-\sqrt{2}$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង

$f\left(1-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\approx -1.9$ ។

• ត្រង់ $x=1+\sqrt{2}$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង

$f\left(1+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\approx 0.9$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+4}{2x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+4}{2x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+4}{2x-2}=\frac{1-3+4}{2+0^--2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-3x+4}{2x-2}=\frac{1-3+4}{2+0^+-2}=+\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{2x-2}=\dfrac{1}{2}x-1+\dfrac{2}{2x-2}$

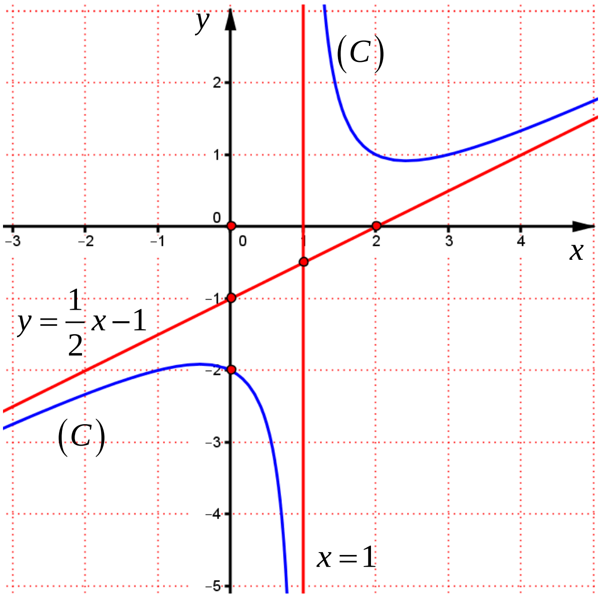
ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{2x-2}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=\dfrac{1}{2}x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-1.9	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0.9	↗ $+\infty$

➤សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍



ខ. ១. សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (d)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $(d): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

ដោយ (d) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច $M(x_0\ ,\ y_0)$

គេបាន $f'(x_0) = \dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0-1)^2}$

$$f(x_0) = \frac{x_0^2 - 3x_0 + 4}{2x_0 - 2}$$

នាំឱ្យ

$$y = \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0-1)^2}x \underbrace{- \frac{x_0^3 - 2x_0^2 - x_0}{2(x_0-1)^2} + \frac{x_0^2 - 3x_0 + 4}{2(x_0-1)}}_{\text{តាង X}}$$

$$X = \frac{-x_0^3 + 2x_0^2 + x_0 + (x_0^2 - 3x_0 + 4)(x_0 - 1)}{2(x_0-1)^2}$$

$$= \frac{-x_0^3 + 2x_0^2 + x_0 + x_0^3 - 3x_0^2 + 4x_0 - x_0^2 + 3x_0 - 4}{2(x_0-1)^2}$$

$$= \frac{-2x_0^2 + 8x_0 - 4}{2(x_0-1)^2} = \frac{-x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0-1)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{(d): y = \left(\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0-1)^2}\right)x + \left(\dfrac{-x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0-1)^2}\right)}$

២. រកកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B

ដោយ (d) កាត់បន្ទាត់អាស៊ីមតូតឈរ $x = 1$ ត្រង់ចំណុច A នោះ $x_A = 1$ គេបាន $A(1\ ,\ y_A)$

គេបាន $y_A = \left(\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0-1)^2}\right)\cdot 1 + \left(\dfrac{-x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0-1)^2}\right)$

$$y_A = \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1 - 2x_0^2 + 8x_0 - 4}{2(x_0-1)^2} = \frac{-x_0^2 + 6x_0 - 5}{2(x_0-1)^2}$$

$$= \frac{(x_0 - 1)(-x_0 + 5)}{2(x_0-1)^2} = \frac{-x_0 + 5}{2(x_0 - 1)}$$

ដូចនេះ កូអរដោនេ $\boxed{A\left(1\ ,\ \dfrac{5 - x_0}{2(x_0-1)}\right)}$ ។

ដោយ (d) កាត់បន្ទាត់អាស៊ីមតូតទ្រេត $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ ត្រង់ចំណុច B នោះ $y_B = \dfrac{1}{2}x_B - 1$

គេបាន $y_B = \left(\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0-1)^2}\right)x_B + \left(\dfrac{-x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0-1)^2}\right)$

$$\frac{1}{2}x_B - 1 = \left(\frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0-1)^2}\right)x_B + \left(\frac{-x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0-1)^2}\right)$$

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0-1)^2}\right]x_B = \frac{-x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0-1)^2} + 1$$

$$\frac{(x_0-1)^2 - x_0^2 + 2x_0 + 1}{2(x_0-1)^2}x_B = \frac{-x_0^2 + 4x_0 - 2 + (x_0-1)^2}{(x_0-1)^2}$$

$$\frac{2}{2(x_0-1)^2}x_B = \frac{2x_0 - 1}{(x_0-1)^2}$$

$$x_B = 2x_0 - 1$$

នាំឱ្យ $y_B = \dfrac{1}{2}x_B - 1 = \dfrac{1}{2}(2x_0 - 1) - 1 = x_0 - \dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ កូអរដោនេ $\boxed{B\left(2x_0 - 1\ ,\ x_0 - \dfrac{3}{2}\right)}$ ។

➤បង្ហាញថា M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AB]$

ដោយ $\dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1 + 2x_0 - 1}{2} = x_0$

$$\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\dfrac{5 - x_0}{2(x_0-1)} + x_0 - \dfrac{3}{2}}{2}$$

$$= \frac{5 - x_0 + 2x_0(x_0 - 1) - 3(x_0 - 1)}{4(x_0-1)}$$

$$= \frac{5 - x_0 + 2x_0^2 - 2x_0 - 3x_0 + 3}{4(x_0-1)}$$

$$= \frac{2x_0^2 - 6x_0 + 8}{4(x_0-1)} = \frac{x_0^2 - 3x_0 + 4}{2x_0 - 2} = y_0$$

នាំឱ្យ $M(x_0\ ,\ y_0)$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ AB

ដូចនេះ $\boxed{M(x_0\ ,\ y_0) \text{ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ } AB}$ ។

IV. ក. ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ :

ដោយ ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូល $O(0,0)$ និងមានកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$ នោះវាមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$

គេបាន សមីការស្តង់ដា $y^2 = 4px$

ដោយ ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $A_1(-2, 4)$

គេបាន $4^2 = 4p(-2)$ ឬ $16 = -8p$ នាំឱ្យ $p = -2$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដា $\boxed{y^2 = -8x}$ ។

ខ. រកតម្លៃនៃ y_2

ដោយ ចំណុច $A_2(-3, y_2)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនោះ

គេបាន $y_2^2 = -8(-3)$ ឬ $y_2^2 = 24$ នោះ $y_2 = \pm 2\sqrt{6}$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{y_2 = \pm 2\sqrt{6}}$ ។

គ. សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) របស់ប៉ារ៉ាបូល

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) របស់ប៉ារ៉ាបូល (P) មានរាង

$(\Delta): x = -p$ នោះ $x = -(-2)$ ឬ $x = 2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសគឺ $\boxed{(\Delta): x = 2}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ០៧ ធ្នូ ២០១៤

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

ផ្នែកពីជគណិត

I. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $A=\lim\limits_{x\to 1^+}|x+1|+2$ $B=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x+1}{x^3-2x^2+5}$ **(កន្លះពិន្ទុ)**

ខ. $C=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ $D=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{|x+3|}$ **(កន្លះពិន្ទុ)**

II. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $A=\int_1^2\left(x^2+3x+2\right)dx$ $B=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(\cos x+\sin x)}\right)dx$ **(មួយពិន្ទុ)**

ខ. $C=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin^2 x}{\cos x}\right)dx$ $D=\int_2^1\left(\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^2}\right)dx$ **(មួយពិន្ទុ)**

III. ដោះស្រាយសមីការ និងវិសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $9^{-2|x|}=\dfrac{1}{81}$ (កន្លះពិន្ទុ) ខ. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{-x^2+1}{2}}>256$ **(កន្លះពិន្ទុ)**

IV. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-mx+m}{x-1}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យចំណុច $A(1,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) នៃ $f(x)$ ។ **(កន្លះពិន្ទុ)**

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ចំពោះ $m=0$ ។ **(មួយពិន្ទុ)**

គ. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y=k$ កាត់ខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច B និង C ដែល $BC=\sqrt{5}$ ។ **(កន្លះពិន្ទុ)**

ផ្នែកធរណីមាត្រ

V. គេមានសមីការ $25x^2+9y^2=225$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប រួចបញ្ជាក់ទីតាំងផ្ចិត និងអ័ក្សធំរបស់វាផង ។ **(មួយពិន្ទុ)**

ខ. រកប្រវែងអ័ក្សធំ និងអ័ក្សតូច នៃអេលីបនេះ រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុចកំពូល និងកំណុំទាំងពីររបស់វា ។ **(មួយពិន្ទុ)**

VI. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានគេមានបីចំណុច $A(1,0,-2)$, $B(2,1,-1)$ និង $C(1,-2,2)$ ។

ក. គណនាប្រវែងជ្រុង AB និង BC នៃត្រីកោណ ABC ។ **(មួយពិន្ទុ)**

ខ. M និង N ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃជ្រុង AB និង BC ។ ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុច M និង N ។ **(មួយពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១៤

I. គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $A=\lim_{x\to 1^+}|x+1|+2=|1+1|+2=\boxed{4}$

$B=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x+1}{x^3-2x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^3}=\boxed{2}$

ខ. $C=\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\boxed{6}$

$D=\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x+3|}=\frac{\sqrt{(-3)^2-1}}{0^+}=\boxed{+\infty}$

II. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $A=\int_1^2\left(x^2+3x+2\right)dx$

$=\int_1^2\left(x^2+3x+2\right)dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^2$

$=\left(\frac{8}{3}+6+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+2\right)$

$=\frac{38}{3}-\frac{23}{6}=\boxed{\frac{53}{6}}$

$B=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2x-\sin^2x}{(\cos x+\sin x)}\right)dx$

$=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)}\right)dx$

$=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx=[\sin x+\cos x]_\pi^{\frac{\pi}{2}}$

$=(1+0)-(0-1)=\boxed{2}$

ខ. $C=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin^2x}{\cos x}\right)dx$

$=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2x}{\cos x}\right)dx=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_\pi^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{1}$

$D=\int_2^1\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_2^1\left(x^{-4}+x^{-2}\right)dx$

$=\left[\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_2^1=\left[-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}\right]_2^1$

$=\left(-\frac{1}{3}-1\right)-\left(-\frac{1}{24}-\frac{1}{2}\right)=\frac{-4}{3}+\frac{13}{24}=\boxed{-\frac{19}{24}}$

III. ដោះស្រាយសមីការ និងវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $9^{-2|x|}=\frac{1}{81}$

$9^{-2|x|}=9^{-2}$

$-2|x|=-2$

$|x|=1$ នាំឱ្យ $x=\pm1$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=\pm1}$ ។

ខ. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{-x^2+1}{2}}>256$

$4^{-\frac{-x^2+1}{2}}>4^4$

គេបាន $-\frac{-x^2+1}{2}>4$ ឬ $x^2-1>8$ ឬ $x^2-9>0$

ឱ្យ $x^2-9=0$ នោះ $x=\pm3$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x^2-9>0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $\boxed{x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)}$ ។

IV. ក. កំណត់តម្លៃ m :

ដើម្បីឱ្យចំណុច $A(1,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង (C) នៃ $f(x)$ លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(2a-x)+f(x)=2b$ ឬ

$f(2-x)+f(x)=4$

ដោយ $f(x)=\frac{x^2-mx+m}{x-1}$

នោះ $f(2-x)=\frac{(2-x)^2-m(2-x)+m}{(2-x)-1}$

$=\frac{4-4x+x^2-2m+mx+m}{-x+1}$

$=\frac{x^2+(m-4)x-m+4}{-(x-1)}$

$=\frac{-x^2-(m-4)x+m-4}{x-1}$

គេបាន $\frac{x^2-mx+m}{x-1}+\frac{-x^2-(m-4)x+m-4}{x-1}=4$

$$\frac{-(2m-4)x+2m-4}{x-1}=4$$

$$-(2m-4)x+2m-4=4x-4$$

$$-(2m-4)x+2m=4x$$

$$\begin{cases}-(2m-4)=4\\ 2m=0\end{cases}\Rightarrow\quad m=0$$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បានគឺ $\boxed{m=0}$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$

ចំពោះ: $m=0$ នោះ: $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

• ដែនកំណត់

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x-1\neq 0$ នោះ: $x\neq 1$

ដូចនេះ: $\boxed{D=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty\,,1)\cup(1\,,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(x^2)'(x-1)-(x-1)'x^2}{x-1}$

$$=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

គេឱ្យ $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$

ដោយ $\forall x\in D\,,(x-1)^2>0$

នាំឱ្យ $x^2-2x=0$ នោះ: $x=0\,,x=2$

ចំពោះ: $x=0:\ f(0)=\dfrac{0^2}{0-1}=0$

ចំពោះ: $x=2:\ f(2)=\dfrac{2^2}{2-1}=4$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 −	‖	− 0	+

• ត្រង់ $x=0$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(0)=0$ ។

• ត្រង់ $x=2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(2)=4$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{1+0^--1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{1+0^+-1}=+\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}=x+1+\dfrac{1}{x-1}$

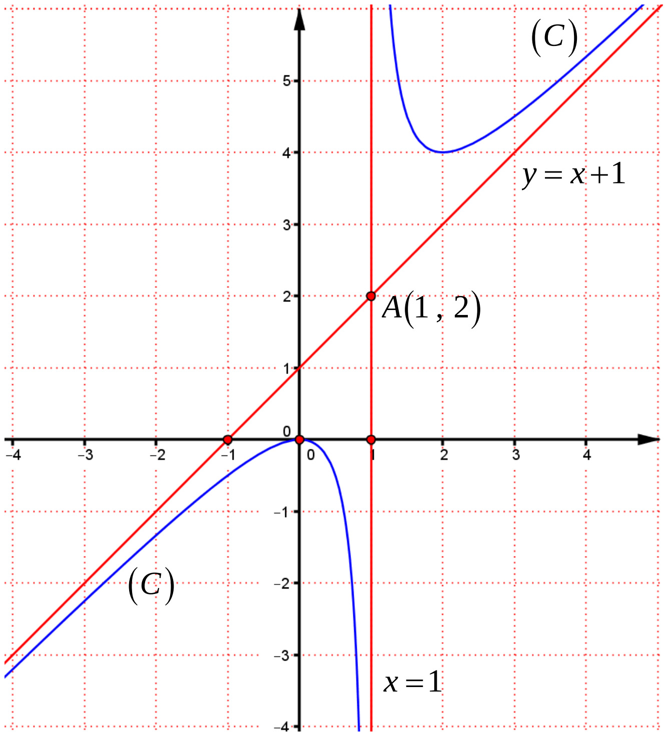
ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 −	‖	− 0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘ 4	↗ $+\infty$

➤សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $f(x)$



គ. កំណត់តម្លៃ k

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ និង $y=k$

គេបាន សមីការអាប់ស៊ីស $\dfrac{x^2}{x-1}=k$ ឬ $x^2=kx-k$

ឬ $x^2-kx+k=0$ ទាញបាន $\begin{cases}x_1+x_2=k\\ x_1x_2=k\end{cases}$

ដែល x_1 និង x_2 ជាអាប់ស៊ីសរៀងគ្នានៃចំណុច B និង C

ដោយ $BC=\sqrt{5}$

គេបាន $|x_2-x_1|=\sqrt{5}$

$$(|x_2-x_1|)^2=(\sqrt{5})^2$$

$$x_2^2-2x_2x_1+x_1^2=5$$

$$x_2^2+2x_2x_1+x_1^2-4x_2x=5$$

$$(x_2+x_1)^2-4x_2x=5$$

$$k^2-4k-5=0$$

សមីការមាន $a-b+c=0$ នោះ $k=-1$, $k=5$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បានគឺ $\boxed{k=-1\ ,\ k=5}$ ។

V. **ក. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប :**

គេមាន $25x^2+9y^2=225$ (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 225)

$$\frac{25x^2}{225}+\frac{9y^2}{225}=1$$

$$\frac{(x-0)^2}{3^2}+\frac{(y-0)^2}{5^2}=1$$

ជាសមីការស្តង់ដានៃអេលីប

ដូចនេះ: $\boxed{\text{សមីការនេះជាសមីការស្តង់ដានៃអេលីប}}$ ។

បញ្ជាក់ទីតាំងផ្ចិត និងអ័ក្សធំរបស់វាផង

គេមាន $\dfrac{(x-0)^2}{3^2}+\dfrac{(y-0)^2}{5^2}=1$

គេអាចសន្និដ្ឋានបានថា វាមានផ្ចិតជាគល់តម្រុយ និងមាន អ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរនៅលើអ័ក្សអរដោនេ

ដូចនេះ: អេលីបមានផ្ចិត $(0\ ,\ 0)$ និងអ័ក្សធំ ជាអ័ក្សឈរនៅលើអ័ក្សអរដោនេ ។

ខ. រកប្រវែងអ័ក្សធំ និងអ័ក្សតូច នៃអេលីបនេះ រួចរកកូអរដោនេ នៃចំណុចកំពូល និងកំណុំទាំងពីររបស់វា

គេមាន $\dfrac{(x-0)^2}{3^2}+\dfrac{(y-0)^2}{5^2}=1$

ផ្ទឹមនឹង $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

គេបាន $h=0\ ,\ k=0\ ,\ a=5\ ,\ b=3$

នាំឱ្យ $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

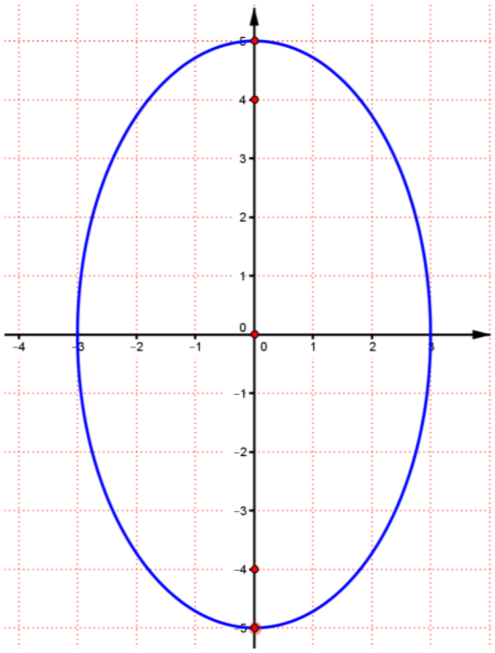
ដូចនេះ: ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=10$

ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b=6$

កំពូល $V(0\ ,\pm a)$ នោះ $V_1(0,5)$ និង $V_2(0,-5)$

កំណុំ $F(0\ ,\pm c)$ នោះ $F_1(0,4)$ និង $F_2(0,-4)$

(ប្រធានគ្មានឱ្យសង់អេលីបទេ តែខ្ញុំសង់ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់)



VI. **ក. គណនាប្រវែងជ្រុង AB និង BC នៃត្រីកោណ ABC :**

គេមាន $A(1\ ,0\ ,-2)\ ,\ B(2\ ,1\ ,-1)$ និង $C(1,-2\ ,\ 2)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=(1\ ,1\ ,1)$ និង $\overrightarrow{BC}=(-1\ ,-3\ ,3)$

គេបាន $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

$$BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{19}$$

ដូចនេះ: ប្រវែងជ្រុង $AB=\sqrt{3}$ ឯកតាប្រវែង
ប្រវែងជ្រុង $BC=\sqrt{19}$ ឯកតាប្រវែង ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច M និង N

គេមាន $A(1\ ,0\ ,-2)\ ,\ B(2\ ,1\ ,-1)$ និង $C(1,-2\ ,\ 2)$

ដោយ M និង N ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ AB និង BC

គេបាន $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ,\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\ ,\ \dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

$$M\left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,-\frac{3}{2}\right)$$

ហើយ $N\left(\dfrac{x_B+x_C}{2}\ ,\ \dfrac{y_B+y_C}{2}\ ,\ \dfrac{z_B+z_C}{2}\right)$

$$N\left(\frac{3}{2}\ ,-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$$

ដូចនេះ: $\boxed{M\left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,-\frac{3}{2}\right)\ ,\ N\left(\frac{3}{2}\ ,-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ០៦ វិច្ឆិកា ២០១៥

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x^2-2x-1\right)}{\left(x^2+1\right)} \qquad B=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{(x+1)(2x+1)}$$ (**១ពិន្ទុ**)

2. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

$$A=\int\left(x^2-2x+1\right)dx \qquad B=\int_0^1\left(3x^3-\frac{1}{4}x\right)dx$$ (**១ពិន្ទុ**)

3. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

ក. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (**កន្លះពិន្ទុ**)

ខ. ចូរគណនា Z^2 រួចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (**កន្លះពិន្ទុ**)

4. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\left(kx^2-5x+7\right)}{(kx-2)}$ ។

ក. ចូរសិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ចំពោះ $k=1$ ។ (**២ពិន្ទុ**)

ខ. ចូរកំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ប៉ះបន្ទាត់ $y=1$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ នៃលំហ គេមានបីចំណុច $A(1,2,1)$, $B(2,0,3)$ និង $C(-1,2,0)$ ។

ក. ចូរគណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចបង្ហាញថា ចំណុច A , B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។ (**១ពិន្ទុ**)

2. ប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $(0,0)$ និងកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'x)$ ។

ក. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល ដោយដឹងថាវាកាត់តាមចំណុច $A(4,8)$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. គេមានចំណុច $B(x_1,4)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនោះ ។ ចូរគណនាតម្លៃ x_1 ។ (**១ពិន្ទុ**)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១៥

I. ចម្លើយផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x^2-2x-1\right)}{\left(x^2+1\right)} \quad (\text{រាងមិនកំណត់ } \frac{\infty}{\infty})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{2-0-0}{1+0}=\boxed{2}$$

$$B=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{(x+1)(2x+1)} \quad (\text{រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0})$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+1}{2x+1}=\frac{3}{-1}=\boxed{-3}$$

2. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

$$A=\int\left(x^2-2x+1\right)dx=\boxed{\frac{x^3}{3}-x^2+x+c} \text{ ដែល } c \text{ ថេរ}$$

$$B=\int_0^1\left(3x^3-\frac{1}{4}x\right)dx=\left[\frac{3x^4}{4}-\frac{x^2}{8}\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right)-(0-0)=\boxed{\frac{5}{8}}$$

3. ក. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $Z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{Z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$ ។

ខ. គណនា Z^2 រួចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $Z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

តាមដឺម៉ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

នាំឱ្យ $Z^2=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$

$$=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{Z^2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$ ។

4. ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C)

គេមាន $f(x)=\frac{\left(kx^2-5x+7\right)}{(kx-2)}$

ចំពោះ $k=1$ គេបាន $f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$

• ដែនកំណត់

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x-2\neq0 \Rightarrow x\neq2$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $\boxed{D=(-\infty\,,\,2)\cup(2\,,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

$$f'(x)=\frac{\left(x^2-5x+7\right)'(x-2)-(x-2)'\left(x^2-5x+7\right)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(2x-5)(x-2)-\left(x^2-5x+7\right)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^2-4x-5x+10-x^2+5x-7}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{x^2-4x+10-7}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

ឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0$

ដោយ $\forall\in D\,,\ (x-2)^2>0$

នាំឱ្យ $x^2-4x+3=0$ មានឫសងាយ $x=1\,,\ x=3$

ចំពោះ $x=1:\ f(1)=\frac{1^2-5+7}{1-2}=-3$

$x=3:\ f(3)=\frac{3^2-5\cdot3+7}{3-2}=1$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

• ត្រង់ $x=1\,,\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$
បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(1)=-3$ ។

• ត្រង់ $x=3\,,\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$
បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(3)=1$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\frac{4-10+7}{2+0^- -2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\frac{4-10+7}{2+0^+ -2}=+\infty$$

ដោយ $\lim_{x\to2} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}=x-3+\dfrac{1}{x-2}$

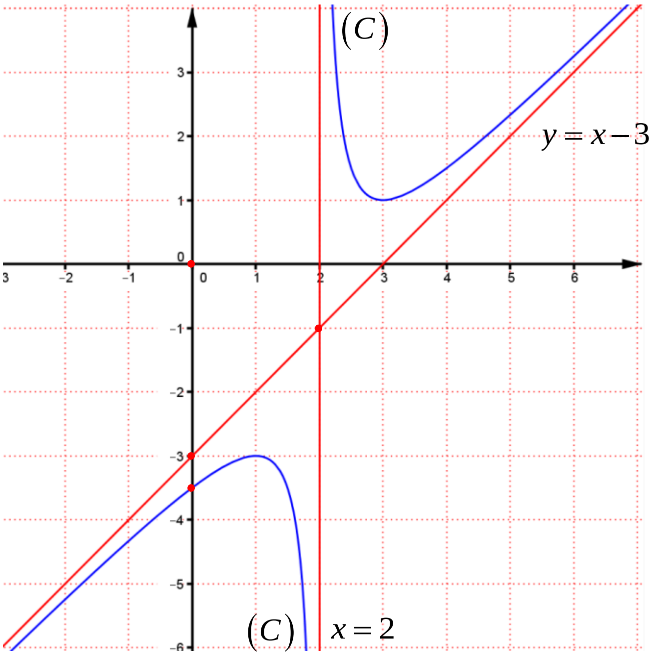
ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

➢សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍



• ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ f

ដោយ អាស៊ីមតូតឈរ $x=2$ និងទ្រេត $y=x-3$ ប្រសព្វគ្នា

ត្រង់ចំណុច $I(2,-1)$ នាំឱ្យ $I(2,-1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C)

ខ. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) ប៉ះបន្ទាត់ $y=1$

គេមាន $f(x)=\dfrac{(kx^2-5x+7)}{(kx-2)}$ និងបន្ទាត់ $y=1$

គេបាន សមីការអាប់ស៊ីស

$$\frac{kx^2-5x+7}{kx-2}=1$$

$$kx^2-5x+7=kx-2$$

$$kx^2+(-5-k)x+9=0$$

ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $y=1$ លុះត្រាតែ $\begin{cases}a\neq0\\ \Delta=0\end{cases}$

នាំឱ្យ $a=k\neq0$

$$kx^2+(-5-k)x+9=0$$

$$\Delta=(-5-k)^2-36k=0$$

$$25+10k+k^2-36k=0$$

$$k^2-26k+25=0$$

សមីការមានឫសងាយ $k=1$, $k=25$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បានគឺ $\boxed{k=1\,,\,k=25}$ ។

II. ចម្លើយផ្នែកធរណីមាត្រ

1. ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ៖

គេមាន $A(1,2,1)$, $B(2,0,3)$ និង $C(-1,2,0)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(1,-2,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,0,-1)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 1 & -2 & 2\\ -2 & 0 & -1\end{vmatrix}=2\vec i-3\vec j-4\vec k$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec i-3\vec j-4\vec k}$ ។

➢បង្ហាញថា ចំណុច A , B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec i-3\vec j-4\vec k\neq\vec 0$

នាំឱ្យ បីចំណុច A , B , C មិនរត់ត្រង់ជួរ

ដូចនេះ: ចំណុច A , B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

តាមរូបមន្ត $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-3)^2+(-4)^2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃត្រីកោណ $\boxed{S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

2. ក. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល

គេមាន ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $(0\,,0)$

និងកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'x)$

នោះ ប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

នាំឱ្យ ប៉ារ៉ាបូលមានសមីការស្តង់ដា $y^2=4px$

ដោយ ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $A(4\,,8)$

គេបាន $8^2=16p \Rightarrow p=4$ នោះ $y^2=4\cdot 4x$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $\boxed{y^2=16x}$ ។

ខ. គណនាតម្លៃ x_1

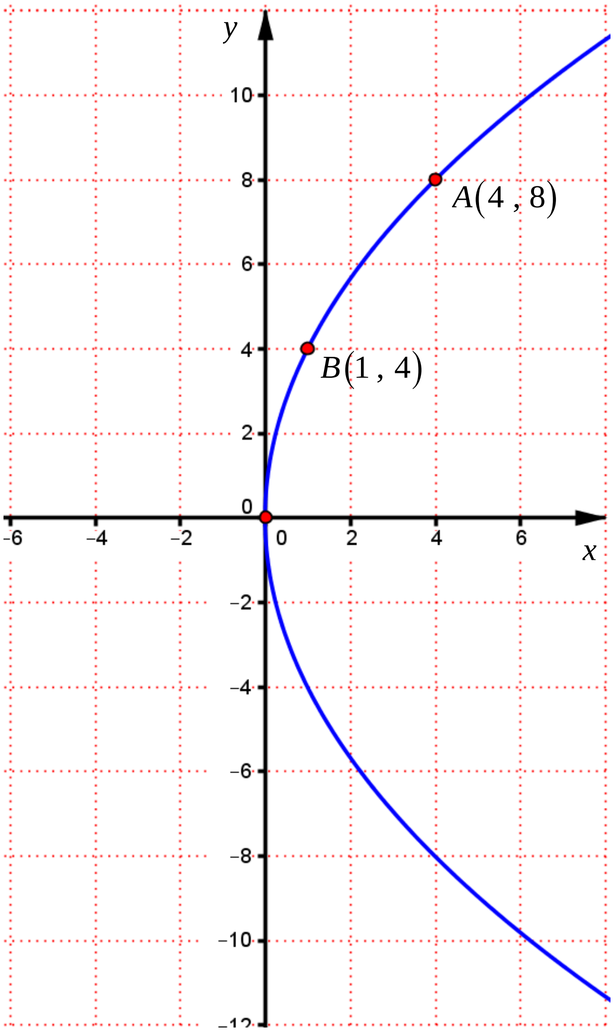
គេមាន ចំណុច $B(x_1\,,4)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនោះ

គេបាន $y^2=16x$ ទៅជា $4^2=16x_1$ នោះ $x_1=1$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{x_1=1}$ ។

ចប់ត្រឹមនេះ

ខ្ញុំសូមបន្ថែមក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូលដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់



ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

បន្ទប់លេខ : ....

តុលេខ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ២៦ វិច្ឆិកា ២០១៦

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖ (**១ពិន្ទុ**)

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)}{\left(x^2-x-2\right)}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

2. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖ (**១ពិន្ទុ**)

ក. $\int\dfrac{1}{\left(x^2+x-6\right)}dx$ ខ. $\int x\sin\left(4-x^2\right)dx$

3. ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិច ៖ (**១ពិន្ទុ**)

ក. $-3x^2+2x-1=0$ ខ. $x^4-2x^2-15=0$

4. អ្នកគ្រូបុប្ផាធ្វើប័ណ្ណលេខចំនួន 9 សន្លឹក ដែលសន្លឹកនីមួយៗសរសេរតែមួយលេខខុសៗគ្នា ក្នុងចំណោមពីលេខ 1 ដល់លេខ 9 ។ ក្នុងការពង្រឹងវិធីគុណ ដែលមានតួគុណនីមួយៗជាលេខ 1 ខ្ទង់ គាត់បានឱ្យក្រុមសិស្សនីមួយៗ ចាប់យកប័ណ្ណលេខចំនួន 2 សន្លឹក រួចគណនាផលគុណនៃលេខក្នុងប័ណ្ណទាំងពីរនោះ ។ រកប្រូបាបនៃការចាប់បានប័ណ្ណលេខ 2 សន្លឹក ដែលផលគុណនៃលេខរបស់វាជាចំនួនគូ ។ (**១ពិន្ទុ**)

5. គេមានអនុគមន៍ $f(x): y=x^3-3x+1$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. ប្រើប្រាស់ខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ចូរពិភាក្សាតាមតម្លៃ m នូវចំនួនឫសរបស់សមីការ $x^3-3x+1-m=0$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. គេមានអេលីប (E) ដែលមានចំណុចកំណុំ $F_1(1,-3)$, $F_2(1,1)$ និងកាត់តាមចំណុច $A\left(-\sqrt{2}+1,1\right)$ ។

ក. ចូររកចម្ងាយពីផ្ចិតអេលីប (E) ទៅចំណុចកំណុំរបស់អេលីបនោះ ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. គណនាប្រវែងអ័ក្សធំ និងអ័ក្សតូចរបស់អេលីប (E) រួចសរសេរសមីការស្តង់ដានៃអេលីបនោះ ។ (**១ពិន្ទុ**)

2. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ មានទិសដៅអវិជ្ជមាន គេមាន 4 ចំណុច $I(3,-1,5)$, $M(4,2,-1)$, $N(1,-2,3)$ និង $A(1,1,3)$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការទូទៅនៃប្លង់ (P) កាត់តាម 3 ចំណុច I , M និង N ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IMN និងសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d) កាត់តាមចំណុច A និងកាត់ប្លង់ (P) ត្រង់ចំណុច M ។ (**១ពិន្ទុ**)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១៦

I. ចម្លើយផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)}{\left(x^2-x-2\right)}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$)

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{2-1}{2+1}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$)

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\times\dfrac{3x}{\sin 3x}\times\dfrac{2}{3}\right)$

$=1\times 1\times\dfrac{2}{3}=\boxed{\dfrac{2}{3}}$

2. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $\displaystyle\int\frac{1}{\left(x^2+x-6\right)}dx$

$\displaystyle=\int\frac{1}{(x-2)(x+3)}dx$

$\displaystyle=\int\frac{1}{5}\left[\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x+3)}\right]dx$

$=\dfrac{1}{5}\left[\ln|x-2|-\ln|x+3|\right]+c$, c ថេរ

$=\boxed{\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+3}\right|+c}$

ខ. $\displaystyle\int x\sin\left(4-x^2\right)dx$

គេតាង $t=4-x^2$ នោះ $dt=-2xdx$ គេបាន ៖

$\displaystyle\int x\sin\left(4-x^2\right)dx=-\frac{1}{2}\int\sin\left(4-x^2\right)\cdot(-2xdx)$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}\int\sin\left(4-x^2\right)\cdot(-2xdx)$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}\int\sin t\,dt=-\frac{1}{2}(-\cos t)+c$, c ថេរ

$=\boxed{\dfrac{1}{2}\cos\left(4-x^2\right)+c}$

3. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិច ៖

ក. $-3x^2+2x-1=0$ មាន $a=-3$, $b=2$, $c=-1$

ដោយ $\Delta'=1-3=-2$

នាំឱ្យ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-2}}{-3}=\dfrac{1}{3}\mp i\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{x=\dfrac{1}{3}-i\dfrac{\sqrt{2}}{3}\ ,\ x=\dfrac{1}{3}+i\dfrac{\sqrt{2}}{3}}$ ជាឫស ។

ខ. $x^4-2x^2-15=0$

គេតាង $t=x^2$ គេបាន ៖ $t^2-2t-15=0$

ដោយ $\Delta'=(-1)^2+15=16$

នាំឱ្យ $t=\dfrac{1\pm\sqrt{16}}{1}=\left[\begin{array}{l}5\\-3\end{array}\right.$

ចំពោះ: $t=5$ សមមូល $x^2=5\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$

ចំពោះ: $t=-3$ សមមូល $x^2=-3\Rightarrow x=\pm\sqrt{-3}=\pm i\sqrt{3}$

ដូចនេះ: $\boxed{x=\pm\sqrt{5}\ ,\ x=\pm i\sqrt{3}}$ ជាឫសនៃសមីការ ។

4. រកប្រូបាបចាប់បានប័ណ្ណ មានផលគុណនៃលេខរបស់វាជាចំនួនគូ

គេមាន ប័ណ្ណ 9 មានចុះលេខពីលេខ 1 ដល់លេខ 9

ដើម្បីឱ្យផលគុណនៃប័ណ្ណទាំងពីរជាចំនួនគូលុះត្រាតែ គេចាប់បានប័ណ្ណមានលេខគូមួយយ៉ាងតិច មានន័យថា គូមួយ ឬគូពីរ

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប័ណ្ណមានផលគុណជាលេខគូ

គេបាន $P(A)=P($ គូ សេស $)+P($ គូ គូ $)+P($ សេស គូ $)$

$=\left(\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{5}{8}\right)+\left(\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{3}{8}\right)+\left(\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{4}{8}\right)$

$=\dfrac{20}{72}+\dfrac{12}{72}+\dfrac{20}{72}=\dfrac{52}{72}=\dfrac{13}{18}$

ដូចនេះ: $\boxed{P(A)=\dfrac{13}{18}=0.72}$ ។

5. ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $y=f(x)=x^3-3x+1$ (ដូចគ្រូអនុ. 2013)

• ដែនកំណត់

ដោយ អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ពហុធា មានន័យគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ: $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty\ ,\ +\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

គេមាន $f(x)=x^3-3x+1$

ដេរីវេ : $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

គេឱ្យ $f'(x)=0$

$3(x-1)(x+1)=0$ នោះ $x=1\,,\ x=-1$

គេបាន $f(1)=1^3-3\cdot1+1=-1$

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+1=3$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• បរមា

-ត្រង់ $x=-1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(-1)=3$ ។

-ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $f(1)=-1$ ។

• លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x+1\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-3x+1\right)=+\infty$$

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

• ភាពប៉ោងផត និងចំណុចរបត់

ដេរីវេទី២ $f''(x)=(3x^2-3)'=6x$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0$ នោះ $x=0$

- បើ $x>0$ នោះ $f''(x)>0$

  នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងលើ

- បើ $x<0$ នោះ $f''(x)<0$

  នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងក្រោម

- បើ $x=0$, $f''(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញា

  នាំឱ្យ f មានចំណុចរបត់ $I(0,f(0))=I(0,1)$

• ផ្ចិតឆ្លុះ

គេនឹង បង្ហាញថា ចំណុចរបត់ $I(0\,,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង

បើ $I(a\,,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ លុះត្រាតែ $f(2a-x)+f(x)=2b$

គេបាន $f(-x)+f(x)=2$

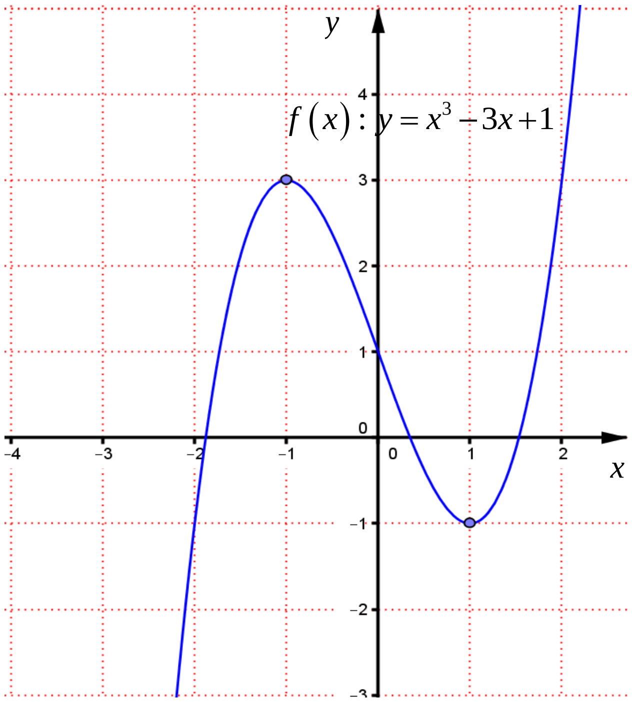
ដោយ $f(-x)+f(x)$

$=(-x)^3-3(-x)+1+x^3-3x+1$

$=-x^3+3x+1+x^3-3x+1=2$ ពិត

ដូចនេះ $I(0\,,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ f

• សង់ក្រាប



ខ. ពិភាក្សាតាមតម្លៃ m នូវចំនួនឫសរបស់សមីការ

គេមាន សមីការ $x^3-3x+1-m=0$

គេបាន $m=x^3-3x+1$

ឫសនៃសមីការនេះបានពីប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ដេក $y=m$ និង ក្រាប C ។ តាមក្រាបគេបានអត្ថិភាពនៃឫសដូចខាងក្រោម ៖

• $m\in(-\infty,-1)$: សមីការមានឫសតែមួយគត់ $x_1<0$

• $m=-1$: សមីការមានឫសបី $x_1=-2\,,\ x_2=x_3=1$

• $m\in(-1\,,3)$: សមីការមានឫសបីផ្សេងគ្នា

• $m=3$: សមីការមានឫសបី $x_1=x_2=-1\,,\ x_3=2$

• $m\in(3\,,+\infty)$: សមីការមានឫសតែមួយគត់ $0<x_1$

II. ចម្លើយផ្នែកគណិតវិទ្យា

1. ក. រកចម្ងាយពីផ្ចិតអេលីប (E) ទៅចំណុចកំណុំរបស់អេលីបនោះ

ដោយ ផ្ចិតជាចំណុចកណ្ដាលនៃ កំណុំទាំងពីរ

គេបាន $2c = F_1F_2$ ឬ $c = \dfrac{F_1F_2}{2}$

ដោយ $F_1(1,-3)$, $F_2(1,1)$

នោះ $F_1F_2 = \sqrt{(1-1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{0+4^2} = 4$

នាំឱ្យ $c = \dfrac{F_1F_2}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

ដូចនេះ ចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំណុំគឺ $\boxed{c = 2}$ ឯកតាប្រវែង ។

ខ. គណនាប្រវែងអ័ក្សធំ និងអ័ក្សតូចរបស់អេលីប (E)

ដោយ អេលីប (E) កាត់តាមចំណុច $A\left(-\sqrt{2}+1, 1\right)$

តាមនិយមន័យអេលីប ដែលមាន $2a$ ជាប្រវែងអ័ក្សធំ

គេបាន $AF_1 + AF_2 = 2a$

ដោយ $AF_1 = \sqrt{\left(1+\sqrt{2}-1\right)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$AF_2 = \sqrt{\left(1+\sqrt{2}-1\right)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2}$

នាំឱ្យ $2a = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

ដូចនេះ ប្រវែងអ័ក្សធំ $\boxed{2a = 4\sqrt{2}}$ ឯកតាប្រវែង ។

ដោយ $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2^2} = 2$

ដូចនេះ ប្រវែងអ័ក្សតូច $\boxed{2b = 4}$ ឯកតាប្រវែង ។

➢សរសេរសមីការស្តង់ដានៃអេលីបនោះ

ដោយ $F_1(1,-3)$, $F_2(1,1)$ មានអាប់ស៊ីសដូចគ្នា

នោះ (E) ជាអេលីបមានអ័ក្សធំស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស

សមីការ ស្តង់ដា $(E): \dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

ដោយ ផ្ចិត I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ កំណុំទាំងពីរ

$I(h, k) = I\left(\dfrac{1+1}{2}, \dfrac{-3+1}{2}\right) = I(1,-1)$

គេបាន $h = 1$, $k = -1$

នាំឱ្យ សមីការស្តង់ដានៃអេលីបអាចសរសេរបានគឺ៖

$$(E): \frac{(x-1)^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{(E): \dfrac{(x-1)^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} + \dfrac{(y+1)^2}{2^2} = 1}$ ។

2. **ក. សរសេរសមីការទូទៅនៃប្លង់ (P) កាត់ I , M និង N**

ប្លង់រាង $(P): a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

ដោយ ប្លង់ (P) កាត់តាមបីចំណុច I , M និង N

នោះប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $I(3,-1,5)$ និង

មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{IM} \times \overrightarrow{IN}$

គេមាន $I(3,-1,5)$, $M(4,2,-1)$, $N(1,-2,3)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{IM} = (1, 3, -6)$, $\overrightarrow{IN} = (-2, -1, -2)$

នោះ $\vec{n} = \overrightarrow{IM} \times \overrightarrow{IN} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 14\vec{j} + 5\vec{k}$

គេបាន $(P): -12(x-3) + 14(y+1) + 5(z-5) = 0$

$-12x + 14y + 5z + 36 + 14 - 25 = 0$

$-12x + 14y + 5z + 25 = 0$

ដូចនេះ $\boxed{(P): -12x + 14y + 5z + 25 = 0}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IMN

រូបមន្ត $S_{IMN} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{IM} \times \overrightarrow{IN}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + 14^2 + 5^2}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{365} = \dfrac{\sqrt{365}}{2}$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{S_{IMN} = \dfrac{\sqrt{356}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

➢សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d)

សមីការការប៉ារ៉ាម៉ែតមានរាង $(d): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt , t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

ដោយ (d) កាត់តាមចំណុច $A(1,1,3)$ និងកាត់តាម

ចំណុច $M(4,2,-1)$ នោះបន្ទាត់ (d) មាន

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AM} = (3, 1, -4)$

នាំឱ្យ $(d): \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1+t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = 3-4t \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{(d): \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1+t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = 3-4t \end{cases}}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
បន្ទប់លេខ : ....
តុលេខ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ២៥ វិច្ឆិកា ២០១៧

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{\dfrac{|x|-1}{2-|x|}}$ ។ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

2. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖ (**០.៥០ពិន្ទុ**)

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+1}{x^3-x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2-3x+2}$ ។

3. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖ (**១ពិន្ទុ**)

ក. $\int_0^1\dfrac{x}{x+2}dx$ ខ. $\int_0^2\dfrac{x^2-3}{x+1}dx$ ។

4. គេមានសមីការ $z^2-6z+12=0$ ។

ក. រកឫសកុំផ្លិច z_1 និង z_2 នៃសមីការនេះ ដោយដឹងថាឫស z_1 មានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន ។ (**០.៥០ពិន្ទុ**)

ខ. សរសេរឫស z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (**០.៥០ពិន្ទុ**)

5. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^3+3x^2-2$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ (**១.៥០ពិន្ទុ**)

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ចំណុចរបត់ I ។ (**០.៥០ពិន្ទុ**)

គ. ប្រើប្រាស់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ ចូរពិភាក្សាចំនួនឫសរបស់សមីការ $x^3+3x^2-2=m$ ទៅតាមតម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។ (**០.៥០ពិន្ទុ**)

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(3,-1,2)$, $B(0,-4,2)$ និង $C(-3,2,1)$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ និងគណនាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. កំណត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC និងគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនេះ ។ (**១ពិន្ទុ**)

2. គេមានប៉ារ៉ាបូល (P) មួយដែលមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ និងមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ក. រកកូអរដោនេកំណុំ F និងសរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ ដោយដឹងថាក្រាភិចវាកាត់តាម $A(2,4)$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. រកតម្លៃ x_1 និងកំណត់ចំណុច B ដោយដឹងថាចំណុច $B(x_1,8)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល (P) ។ (**០.៥០ពិន្ទុ**)

គ. ចូរសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូលនៅត្រង់ចំណុច A ខាងលើ ។ (**០.៥០ពិន្ទុ**)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១៧

I. ចម្លើយផ្នែកពីជគណិត

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=\sqrt{\dfrac{|x|-1}{2-|x|}}$ មានន័យលុះត្រា $\begin{cases} 2-|x|\neq 0 & (1) \\ \dfrac{|x|-1}{2-|x|}\geq 0 & (2)\end{cases}$

តាម $(1): 2-|x|\neq 0$ នោះ $x\neq \pm 2$

តាម $(2): \dfrac{|x|-1}{2-|x|}\geq 0$ គេនឹងសិក្សាសញ្ញារបស់វា

- ឫសនៃភាគយក $|x|-1=0$ នោះ $x=\pm 1$
- ឫសនៃភាគបែង $2-|x|=0$ នោះ $x=\pm 2$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$\|x\|-1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$2-\|x\|$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{\|x\|-1}{2-\|x\|}\geq 0$		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$		$-$	

ដូចនេះ៖ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=(-2,-1]\cup[1\,,2)}$ ។

2. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+1}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+1}{x(x-1)(x+1)}$

- បើ $x\to 1^-$ នោះ $x-1\to 0^-$

គេបាន $\dfrac{1^2-3\cdot 1+1}{1\cdot 0^-\cdot(1+1)}=\dfrac{-1}{0^-}\to +\infty$

- បើ $x\to 1^+$ នោះ $x-1\to 0^+$

គេបាន $\dfrac{1^2-3\cdot 1+1}{1\cdot 0^+\cdot(1+1)}=\dfrac{-1}{0^+}\to -\infty$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+1}{x^3-x}=\begin{cases}+\infty & \text{បើ } x\to 1^- \\ -\infty & \text{បើ } x\to 1^+\end{cases}}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2-3x+2}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{\infty}{\infty}$)

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}\left(3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}=\dfrac{3-0+0}{2-0+0}=\boxed{\dfrac{3}{2}}$ ។

3. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x+2}dx=\int_0^1\frac{x+2-2}{x+2}dx=\int_0^1\left(1-2\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx$

$\displaystyle=\int_0^1\left(1-2\cdot\frac{(x+2)'}{x+2}\right)dx$

$=\left[x-2\ln|x+2|\right]_0^1$

$=(1-2\ln 3)-(0-2\ln 2)=\boxed{1-2\ln\dfrac{3}{2}}$

ខ. $\displaystyle\int_0^2\frac{x^2-3}{x+1}dx=\int_0^2\frac{x^2-1-2}{x+1}dx$

$\displaystyle=\int_0^2\left(\frac{x^2-1}{x+1}-2\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx$

$\displaystyle=\int_0^2\left(x-1-2\cdot\frac{(x+1)'}{x+1}\right)dx$

$=\left[\dfrac{x^2}{2}-x-2\ln|x+1|\right]_0^2$

$=(2-2-2\ln 3)-2\ln 1=\boxed{-2\ln 3}$

4. ក. រកឫសកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ដែល z_1 មានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន៖

គេមាន $z^2-6z+12=0$, $\Delta'=9-12=-3$

នាំឱ្យ $z_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{-3}}{1}=3+i\sqrt{3}$

$z_2=\dfrac{-(-3)-\sqrt{-3}}{1}=3-i\sqrt{3}$

ដូចនេះ៖ សមីការមានឫស $\boxed{z_1=3+i\sqrt{3}\ ,\ z_2=3-i\sqrt{3}}$ ។

ខ. សរសេរឫស z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$z_1=3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$

$=\boxed{2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}$

$z_2=3-i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)$

$=\boxed{2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)}$

5. **ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$**

គេមាន $f(x)=x^3+3x^2-2$ **(ប្រហែលគ្រូអនុ.២០១៧)**

•ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty\ ,+\infty)}$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

គេមាន $f(x)=x^3+3x^2-2$

ដេរីវេ : $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

គេឱ្យ $f'(x)=0$

$3x(x+2)=0$ នោះ $x=0\ ,\ x=-2$

គេបាន $f(0)=0^3+3\cdot0^2-2=-2$

$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-2=2$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

•បរមា

-ត្រង់ $x=-2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(-2)=2$ ។

-ត្រង់ $x=0$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ$(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $f(0)=-2$ ។

•លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x^2-2\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+3x^2-2\right)=+\infty$

•តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

•ភាពប៉ោង និងភាពផត

ដេរីវេទី២ $f''(x)=\left(3x^2+6x\right)'=6x+6$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x+6=0$ នោះ $x=-1$ ជាឫស

- បើ $x>-1$ នោះ $f''(x)>0$

នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងលើ

- បើ $x<-1$ នោះ $f''(x)<0$

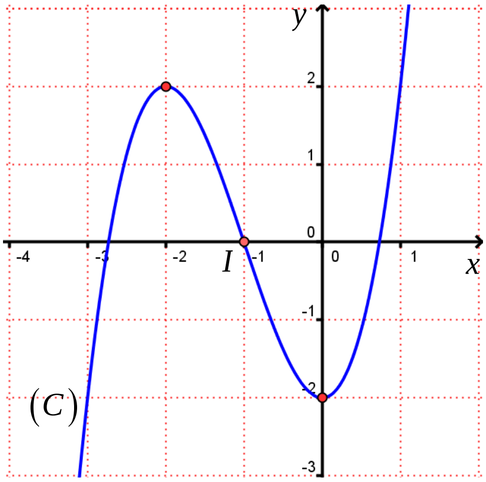
នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផត ចុះខាងក្រោម

- បើ $x=-1$, $f''(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញា

នាំឱ្យ f មានចំណុចរបត់មួយតាងដោយ I ដែល

$I(-1,f(-1))$ ឬ $I(-1,0)$

•សង់ក្រាប



ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចរបត់ I

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $T: y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ដោយ T ប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុចរបត់ $I(-1,0)$

នាំឱ្យ $x_0=-1\ ,\ y_0=0$

នោះ $f'(x_0)=f'(-1)=3(-1)^2+6(-1)=-3$

$f(x_0)=f(-1)=(-1)^3+3(-1)^2-2=0$

គេបាន $T: y=-3(x+1)+0=-3x-3$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{T: y=-3x-3}$ ។

គ. ប្រើប្រាស់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ពិភាក្សាចំនួនឫស

របស់សមីការ $x^3+3x^2-2=m$ តាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m

គេមាន សមីការ $x^3+3x^2-2=m$

ឫសនៃសមីការនេះបានពីប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ដេក $y=m$ និង

ក្រាប C ។ តាមក្រាបគេបានអត្ថិភាពនៃឫសដូចខាងក្រោម ៖

•$m\in(-\infty,-2)$: សមីការមានឫសតែមួយគត់ $x_1<0$

•$m=-2$: សមីការមានឫសបី $x_1=-3\ ,x_2=x_3=0$

•$m\in(-2\ ,\ 2)$: មានឫសបីផ្សេងគ្នា $x_1<x_2<0<x_3$

•$m=2$: សមីការមានឫសបី $x_1=x_2=-2\ ,\ x_3=1$

•$m\in(2\ ,+\infty)$: សមីការមានឫសវិជ្ជមានតែមួយគត់ $0<x_1$

II. ចម្លើយផ្នែកធរណីមាត្រ

1. ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$

គេមាន $A(3,-1,2)$, $B(0,-4,2)$, $C(-3,2,1)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\,,\,y_B-y_A\,,\,z_B-z_A)$

$=(0-3\,,\,-4+1\,,\,2-2)$

$=\boxed{(-3\,,\,-3\,,\,0)}$

$\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A\,,\,y_C-y_A\,,\,z_C-z_A)$

$=(-3-3\,,\,2+1\,,\,1-2)$

$=\boxed{(-6\,,\,3\,,\,-1)}$

$\overrightarrow{BC}=(x_C-x_B\,,\,y_C-y_B\,,\,z_C-z_B)$

$=(-3-0\,,\,2+4\,,\,1-2)$

$=\boxed{(-3\,,\,6\,,\,-1)}$

គណនាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(-3\,,\,-3\,,\,0)$

$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+0^2}=3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC}=(-6\,,\,3\,,\,-1)$

$AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-6)^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{46}$

$\overrightarrow{BC}=(-3\,,\,6\,,\,-1)$

$BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-3)^2+6^2+(-1)^2}=\sqrt{46}$

នាំឱ្យ បរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC

$P=AB+AC+BC=3\sqrt{2}+\sqrt{46}+\sqrt{46}$

ដូចនេះ $\boxed{P=3\sqrt{2}+2\sqrt{46}}$ ឯកតាប្រវែង ។

ខ. កំណត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

ដោយ ត្រីកោណ ABC មានប្រវែងជ្រុង $AC=BC=\sqrt{46}$

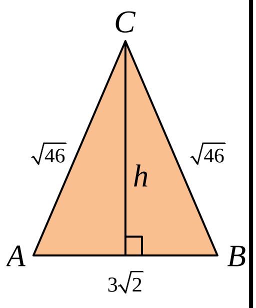
ដូចនេះ $\boxed{ABC \text{ ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល } C}$ ។

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនេះ (របៀបទី១)

$$h=\sqrt{\sqrt{46}^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{166}}{2}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{166}}{2}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{83}}{2}$$



ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=\frac{3\sqrt{83}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនេះ (របៀបទី២)

រូបមន្ត $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}\right|$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -3 & 0\\ -6 & 3 & -1\end{vmatrix}=3\vec{i}-3\vec{j}-27\vec{k}$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+(-3)^2+(-27)^2}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{1+1+9^2}=\frac{3\sqrt{83}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=\frac{3\sqrt{83}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

2. ក. រកកូអរដោនេកំណុំ F

ដោយ ប៉ារ៉ាបូល (P) មានកំពូល $O(0,0)$ និងមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេបាន សមីការស្តង់ដាមានរាង $y^2=4px$

បម្រាប់ ក្រាភិចប៉ារ៉ាបូល (P) កាត់តាម $A(2,4)$

គេបាន $4^2=4p\cdot 2$ នោះ $p=2$

ដូចនេះ កូអរដោនេកំណុំ $\boxed{F(p\,,\,0)=F(2\,,\,0)}$ ។

សរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ

ដោយ សមីការស្តង់ដាមានរាង $y^2=4px$ ដែលមាន $p=2$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាសរសេរបាន $\boxed{(P):\,y^2=8x}$ ។

ខ. រកតម្លៃ x_1 **និងកំណត់ចំណុច** B

ដោយដឹងថាចំណុច $B(x_1\,,\,8)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល (P)

គេបាន $y^2=8x$ ទៅជា $8^2=8x_1$ នោះ $x_1=8$

ដូចនេះ $\boxed{x_1=8\,,\,B(8\,,\,8)}$ ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (d) **ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូលត្រង់ចំណុច** A

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $(d):\,y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$

ដោយ (d) ប៉ះ (P) ត្រង់ $A(2,4)$ នោះ $x_0=2, y(x_0)=4$

ហើយ $y^2=8x$ នោះ $2yy'=8$ នោះ $y'=\frac{4}{y}$

នាំឱ្យ $y'(x_0)=\frac{4}{y(x_0)}=\frac{4}{4}=1$

គេបាន $(d):\,y=1(x-2)+4$ ឬ $y=x+2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះសរសេរបាន $\boxed{(d):\,y=x+2}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និង កីឡា

ឈ្មោះ :................................
បន្ទប់លេខ :................................
តុលេខ :................................
ហត្ថលេខា :................................

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា

សម័យប្រឡង : ថ្ងៃទី៣០ ខែវិច្ឆិកា ឆ្នាំ២០១៨
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា
រយៈពេល : ០២ ម៉ោង

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ
ណ.បថ

ប្រធាន :

I. ពីជគណិត

១.(១ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម÷ ក. $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$; ខ. $\lim_{x\to0}\frac{(\sin 5x)(\sin 4x)}{-2x^2}$

២.(១ពិន្ទុកន្លះ) ចូរដោះស្រាយនៅក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ នៃចំនួនកុំផ្លិចសមីការ÷

ក. $-9Z^2+18\sqrt{2}Z-36=0$ ។ យើងតាង Z_1 ជាឫសរបស់សមីការដែលផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន និង Z_2 ឫសមួយទៀត។

ខ. ចូររកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2$ ។

៣.(១ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល÷ ក. $I=\int_1^2\left[(x-1)(x^2+2x-3)\right]dx$; ខ. $J=\int_{-1}^0\left(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)}\right)dx$

៤.(១ពិន្ទុកន្លះ) អ្នកចិញ្ចឹមសត្វម្នាក់គាត់ទិញ កូនមាន់ កូនទា និងកូនជ្រូកមកចិញ្ចឹម។
បើគាត់ទិញកូនមាន់ 3000 ក្បាល កូនទា 2000 ក្បាល និងកូនជ្រូក 100 ក្បាលគាត់ត្រូវចំណាយអស់ប្រាក់ 12 000 000 រៀល។
បើគាត់ទិញកូនមាន់ 2000 ក្បាល កូនទា 1000 ក្បាល និងកូនជ្រូក 110 ក្បាលគាត់ត្រូវចំណាយអស់ប្រាក់ 8 800 000 រៀល។
បើគាត់ទិញកូនមាន់ 1100 ក្បាល កូនទា 500 ក្បាល និងកូនជ្រូក 52 ក្បាលគាត់ត្រូវចំណាយអស់ប្រាក់ 4 510 000 រៀល។
ចូររកតម្លៃកូនមាន់មួយក្បាល កូនទាមួយក្បាល និងកូនជ្រូកមួយក្បាល។

៥. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x^2-5x+7}{2-x}$

ក. (១ពិន្ទុ) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ និងបង្ហាញថា $f(x)=-x+3-\frac{1}{(x-2)}$ ។

ខ. (១ពិន្ទុ) រកសមីការនៃអាស៊ីមតូតទ្រេត និងអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) របស់ f ។

គ. (១ពិន្ទុ) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

II. ធរណីមាត្រ

១. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច M(−4,2,0), N(0,2,2), P(2,4,4), Q(0,6,−8) ។

ក. (១ពិន្ទុ) រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{MP}$; $\overrightarrow{MQ}$; $\overrightarrow{NP}$; $\overrightarrow{NQ}$; $\overrightarrow{PQ}$ ។

ខ. (១ពិន្ទុ) គណនាប្រវែង MN , MP , MQ , NQ និង PQ ។ បង្ហាញថាត្រីកោណ MNQ និង MPQ កែងត្រង់ M ។

កំណែប្រឡងឆមាស

I.ពីជគណិត

១. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)+(x-1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+1)}{(x+1)}$, $x\neq1$

$=1$

ខ. $\lim_{x\to0}\frac{(\sin5x)(\sin4x)}{-2x^2}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}\cdot\frac{\sin4x}{4x}\cdot\frac{5\cdot4}{-2}$

$=-10$

២.ក.ចូរដោះស្រាយសមីការក្នុង $\mathbb{C}$

$-9Z^2+18\sqrt{2}Z-36=0$ ឬ $Z^2-2\sqrt{2}Z+4=0$

តាម $\Delta'=(-\sqrt{2})^2-4=-2=2i^2$

នោះ $\sqrt{\Delta'}=i\sqrt{2}$

មានឫស

$Z_1=\frac{-(-\sqrt{2})+i\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

$Z_2=\frac{-(-\sqrt{2})-i\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

ដូចនេះ: $Z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ និង $Z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

ខ. ចូររកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2$

-របៀបទី១

គេមាន $Z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

និង $Z_1=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

នោះ: $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2=\left[\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}\right]^2$

$=\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$

$=\left(\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}\right)^2$

$=\cos\pi+i\sin\pi$

-របៀបទី២

គេមាន $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^2$

$=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$

$=\frac{1+2i+i^2}{1-2i+i^2}$

$=\frac{2i}{-2i}$

$=-1$

$=\cos\pi+i\sin\pi$

ដូចនេះ: $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2$ មានម៉ូឌុលស្មើ 1 និងអាគុយម៉ង់ $\pi+2k\pi$

៣. គណនាអាំងតេក្រាល ៖

ក. $I=\int_1^2\left[(x-1)(x^2+2x-3)\right]dx$

$=\int_1^2(x^3+2x^2-3x-x^2-2x+3)dx$

$=\int_1^2(x^3+x^2-5x+3)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_1^2$

$=\left(\frac{16}{4}+\frac{8}{3}-10+6\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+3\right)$

$=\frac{19}{12}$

ខ. $J=\int_{-1}^0\left(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)}\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{x-1}-\ln|x-1|\right]_{-1}^0$

$=(1-\ln|-1|)-\left(\frac{1}{2}-\ln|-2|\right)$

$=\frac{1}{2}+\ln2$

៤.រកតម្លៃ កូនមាន់មួយ កូនទាមួយនិងកូនជ្រូកមួយ ។

-តាង x,y,z ជាតម្លៃកូនមាន់មួយក្បាល កូនទាមួយក្បាល

និង កូនជ្រូកមួយក្បាលរៀងគ្នា

តាមសម្មតិកម្ម

គេបានប្រពន្ធ័សមីការ

$$\begin{cases}3000x+2000y+100z=12,000,000\\2000x+1000y+110z=8,800,000\\1100x+500y+52z=4,510,000\end{cases}$$

ឬ
$$\begin{cases}30x+20y+z=120,000\\200x+100y+11z=880,000\\275x+125y+13z=1,127,500\end{cases}$$

តាមដេទែមីណង់

$$D=\begin{vmatrix}30&20&1\\200&100&11\\275&125&13\end{vmatrix}=3750$$

$$D_x=\begin{vmatrix}120000&20&1\\880000&100&11\\1127500&125&13\end{vmatrix}=7,500,000$$

$$D_y=\begin{vmatrix}30&120000&1\\200&880000&11\\275&1127500&13\end{vmatrix}=6,625,000$$

$$D_z=\begin{vmatrix}30&20&120000\\200&100&880000\\275&125&1127500\end{vmatrix}=112,500,000$$

គេបាន $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{7,500,000}{3750}=2000$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{6,625,000}{3750}=1500$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{112,500,000}{3750}=30000$$

ដូចនេះ

កូនមាន់មួយមានតម្លៃ 2000 រៀល

កូនទាមួយមានតម្លៃ 1500 រៀល

កូនមាន់មួយមានតម្លៃ 30000 រៀល

៥.ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

លក្ខខណ្ឌ $2-x\neq 0$ នាំឲ្យ $x\neq 2$

ដូចនេះ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

-បង្ហាញថា $f(x)=-x+3-\dfrac{1}{(x-2)}$

គេអាចសរសេរ $f(x)=\dfrac{-x(2-x)+3(2-x)+1}{2-x}$

$$=-x+3+\frac{1}{2-x}$$

$$=-x+3+\frac{1}{-(x-2)}$$

$$=-x+3-\frac{1}{x-2} \text{ ពិត}$$

ខ.រកសមីការនៃអាស៊ីមតូត ក្រាប (C) របស់ f ។

គេមាន

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ នាំឲ្យបន្ទាត់ $y=-x+3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

និង $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\pm\infty$ នាំឲ្យបន្ទាត់ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ដូចនេះក្រាប (C) មាន
បន្ទាត់ $y=-x+3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនិងបន្ទាត់ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។

គ.សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f'(x)=\left(-x+3-\dfrac{1}{x-2}\right)'$

$$=-1+\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{-(x-2)^2+1}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{-x^2+4x-3}{(x-2)^2}$$

បើ $f'(x)=0$ នោះ $\dfrac{-x^2+4x-3}{(x-2)^2}=0$

ឬ $-x^2+4x-3=0$

មានឫស $x=1$, $x=3$

សញ្ញា $f'(x)$ ដូច $-x^2+4x-3$ ព្រោះ $(x-2)^2>0$ លើ D_f

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $+$	‖ $+$	0	$-$

ចំណុចបរមាធៀប : f មានតម្លៃ

-អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=-1+3-\dfrac{1}{1-2}=3$

-អតិបរមាធៀបត្រង់ $x=3$ គឺ $f(1)=-3+3-\dfrac{1}{3-2}=-1$

លីមីតចុងដែន

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\left(-x+3-\frac{1}{x-2}\right)=\pm\infty=\begin{cases}+\infty & if\quad x\to 2^-\\-\infty & if\quad x\to 2^+\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-x+3-\frac{1}{x-2}\right)=\mp\infty=\begin{cases}+\infty & if\quad x\to-\infty\\-\infty & if\quad x\to+\infty\end{cases}$$

តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

-ខ្សែកោង

.ចំណុចប្រសព្វនៃ (C) នឹងអក្សនៃតម្រុយ

បើ $x=0$ នោះ $y=f(0)=3-\dfrac{1}{-2}=3.5$

បើ $y=0$ នោះ $f(x)=0$ ឬ $\dfrac{x^2-5x+7}{2-x}=0$

សមមូល $x^2-5x+7=0$

មាន $\Delta=(-5)^2-4\times1\times7=-3<0$ (គ្មានឫសក្នុង D_f)

នាំឲ្យ (C) មិនកាត់អក្ស $(x'ox)$ ទេ។

.ផ្ចិតឆ្លុះ : ចំពោះ $x=2$ និង $y=-2+3=1$

បង្ហាញថា $I(2,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ

រូបមន្ត $f(2a-x)+f(x)=2b$ ឬ $f(4-x)+f(x)=2$

គេបាន

$$f(4-x)+f(x)=\left(-(4-x)+3-\frac{1}{(4-x)-2}\right)+\left(-x+3-\frac{1}{x-2}\right)$$

$$=2-\frac{1}{-x+2}-\frac{1}{x-2}$$

$$=2+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-2}$$

$=2$ ពិត

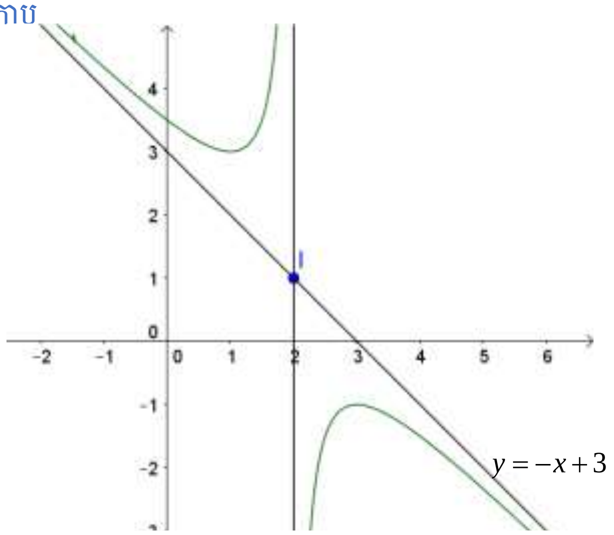
នាំឲ្យ $I(2,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C) ។

.តារាងតម្លៃលេខ

បន្ទាត់ $y=-x+3$

x	0	3
y	3	0

គូសក្រាប



II. រណិមាត្រ

$M(-4,2,0)$, $N(0,2,2)$, $P(2,4,4)$, $Q(0,6,-8)$

ក.រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{NQ}$, $\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{MN}=(0+4,2-2,2-0)=(4,0,2)$

$\overrightarrow{MP}=(2+4,4-2,4-0)=(6,2,4)$

$\overrightarrow{MQ}=(0+4,6-2,-8-0)=(4,4-8)$

$\overrightarrow{NP}=(2-0,4-2,4-2)=(2,2,2)$

$\overrightarrow{NQ}=(0-0,6-2,-8-2)=(0,4,-10)$

$\overrightarrow{PQ}=(0-2,6-4,-8-4)=(-2,2,-12)$

ខ.គណនាប្រវែង MN , MP , MQ , NQ និង PQ ។

$MN=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{4^2+0^2+2^2}=2\sqrt{5}$ ឯកតាប្រវែង

$MP=\left|\overrightarrow{MP}\right|=\sqrt{6^2+2^2+4^2}=2\sqrt{14}$ ឯកតាប្រវែង

$MQ=\left|\overrightarrow{MQ}\right|=\sqrt{4^2+4^2+(-8)^2}=4\sqrt{6}$ ឯកតាប្រវែង

$NP=\left|\overrightarrow{NP}\right|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$ ឯកតាប្រវែង

$NQ=\left|\overrightarrow{NQ}\right|=\sqrt{0^2+4^2+(-10)^2}=2\sqrt{29}$ ឯកតាប្រវែង

$PQ=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-12)^2}=2\sqrt{38}$ ឯកតាប្រវែង

-បង្ហាញថាត្រីកោណ MNQ និង MPQ កែងត្រង់ M

លក្ខខណ្ឌ $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$ និង $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$

គេមាន

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MQ}=4\times4+0\times4+2\times(-8)=16-16=0$ (1)

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=6\times4+2\times4+4\times(-8)=24+8-32=0$ (2)

តាម(1)និង (2)គេបាន MNQ និង MPQ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M

ដូចនេះ MNQ និង MPQ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M ។

សុំអភ័យទោសរាល់កំហុសឆ្គងគ្រប់យ៉ាង និង សូមជូនពរឲ្យសំណាងល្អជានិច្ច ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងជ្រើសរើសៈ

☑ គ្រូកម្រិតមូលដ្ឋាន

ពីឆ្នាំ ២០០២ ដល់២០១៨

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១១ តុលា ២០០២

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $x^2-2x+5=0$ ។

ខ. គណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $8-6i$ ។ (**១ពិន្ទុកន្លះ**)

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ : $I=\int\cos^2 x dx$, $J=\int x\sin x dx$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)=2x\left(x^3+1\right)$ ដោយដឹងថាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍នេះស្មើ 3 កាលណា $x=-1$ ។ (**២ពិន្ទុ**)

III. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x-1}{|x|+1}$ ។

ក. សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។

ខ. តើអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$ ឬទេ ? (**១ពិន្ទុ**)

IV. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y'+4y=0$ ។

ខ. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(F): y''+4y'+4y=-4x$ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដែលអនុគមន៍ $\varphi: x\mapsto ax+b$ ជាចម្លើយនៃ (F) ។ (**១ពិន្ទុកន្លះ**)

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច $A(2,2,2)$, $B(2,0,1)$ និង $C(4,1,-1)$ ។

ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B ។

ខ. រកសមីការប្លង់កាត់តាមចំណុចទាំងបីនេះ ។ (**១ពិន្ទុកន្លះ**)

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ។

ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងក្រាបអនុគមន៍ f ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) បន្ទាត់ $x=2$ និង $x=5$ ។ (**២ពិន្ទុកន្លះ**)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០២

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

គេមាន $x^2-2x+5=0$

$x^2-2x+1=-4$

$(x+1)^2=-4$

$x+1=\pm\sqrt{-4}$

$x=-1\pm 2i$

ដូចនេះ សមីការមានឬស $\boxed{x=-1\pm 2i}$ ។

ខ. គណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $8-6i$

គេតាង z ជាឫសការេនៃចំនួន $8-6i$

គេបាន $z^2=8-6i$

នាំឱ្យ $z=\pm\sqrt{8-6i}$

$=\pm\sqrt{9-6i-1}$

$=\pm\sqrt{9-6i+i^2}$

$=\pm\sqrt{(3-i)^2}=\pm(3-i)$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ឫសការេនៃ } 8-6i \text{ ស្មើនឹង } 3-i\,,\ -3+i}$ ។

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

$\mathbf{I}=\int\cos^2 xdx$ (តាម $2\cos^2 x=1+\cos 2x$)

$=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+c$, c ជាចំនួនថេរ

$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$

ដូចនេះ $\boxed{I=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c}$ ។

$\mathbf{J}=\int x\sin xdx$ (ប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក)

គេតាង $u=x$ នោះ $du=dx$

$dv=\sin xdx$ នោះ $v=-\cos x$

រូបមន្ត $\int udv=uv-\int vdu$

គេបាន $\int x\sin xdx=-x\cos x-\int -\cos xdx$

$=-x\cos x+\sin x+c$, c ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{J=-x\cos x+\sin x+c}$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=2x(x^3+1)$

គេតាង $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$

នាំឱ្យ $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x(x^3+1)dx$

$=2\int(x^4+x)dx$

$=2\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{2}\right)+c$

ដោយ $F(-1)=3$ នោះ $2\left(\frac{(-1)^5}{5}+\frac{(-1)^2}{2}\right)+c=3$

គេបាន $-\frac{2}{5}+1+c=3 \Rightarrow c=\frac{12}{5}$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=\frac{2x^5}{5}+x^2+\frac{12}{5}}$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

III. ក. សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $x=0$

គេមាន $f(x)=\frac{x-1}{|x|+1}=\begin{cases}\frac{x-1}{x+1} & \text{បើ } x\ge 0\\ -1 & \text{បើ } x<0\end{cases}$

អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ វាផ្ទៀងផ្ទាត់

$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

ដោយ $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

$f(0)=\frac{0-1}{0+1}=-1$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=-1$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ } x=0}$ ។

ខ. តើអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$ ឬទេ ?

បើ f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $f'_-(0)=f'_+(0)$

តាមនិយមន័យដេរីវេ $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

គេបាន $f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1-(-1)}{x}=\frac{0}{0^-}=0$

និង $f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x-1}{x+1}-(-1)}{x}=\lim_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x-1+x+1}{x+1}}{x}$

$=\lim_{x\to0^+}\dfrac{\frac{2x}{x+1}}{x}=\lim_{x\to0^+}\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2}{0+1}=2$

ដោយ $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ នោះ f គ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ទេ

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ គ្មានដេរីវេត្រង់ } x=0 \text{ ទេ}}$ ។

IV. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

គេមាន $(E): y''+4y'+4y=0$

គេបាន សមីការសម្គាល់ $\lambda^2+4\lambda+4=0$ ឬ $(\lambda+2)^2=0$

នោះ សមីការសម្គាល់មានឬសឌុប $\lambda_0=-2$

សមីការ (E) មានចម្លើយទូទៅរាង

$y_c=Ae^{\lambda_0 x}+Bxe^{\lambda_0 x}$, A,B ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ $\boxed{y_c=Ae^{-2x}+Bxe^{-2x}}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b

គេមាន $\varphi: x\mapsto ax+b$ អាចសរសេរ $\varphi(x)=ax+b$

នាំឱ្យ $\varphi'(x)=a$ និង $\varphi''(x)=0$

ដោយ φ ជាចម្លើយនៃ (F) នោះគេបាន ៖

$\varphi''+4\varphi'+4\varphi=-4x$

$0+4a+4(ax+b)=-4x$

$4ax+(4a+4b)=-4x$

$\varphi''+4\varphi'+4\varphi=-4x$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}4a=-4\\4a+4b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=-1\,,\,b=1}$ ។

V. ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B

បើ ΔABC កែងត្រង់ B លុះត្រាតែ $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$

មានន័យថា គេបានផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

គេមាន $A(2,2,2)$, $B(2,0,1)$ និង $C(4,1,-1)$

នោះ $\overrightarrow{BA}=(0,2,1)$ និង $\overrightarrow{BC}=(2,1,-2)$

គេបាន $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=xx'+yy'+zz'$

$=(0)(2)+(2)(1)+(1)(-2)$

$=0+2-2=0$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{ABC \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ } B}$ ។

ខ. រកសមីការប្លង់កាត់តាមចំណុចទាំងបីនេះ

ប្លង់ $(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយប្លង់ (ABC) កាត់ $B(2,0,1)$

នាំឱ្យ $x_0=2$, $y_0=0$, $z_0=1$

ហើយ ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec n=\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$

តែ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\0&2&1\\2&1&-2\end{vmatrix}=-5\vec i+2\vec j-4\vec k$

នាំឱ្យ $a=-5$, $b=2$, $c=-4$

គេបាន $(ABC): -5(x-2)+2(y-0)-4(z-1)=0$

$-5x+2y-4z+14=0$

ដូចនេះ $\boxed{(ABC): -5x+2y-4z+14=0}$ ។

VI. ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

គេមាន $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$

ដែនកំណត់ $\begin{cases}x-1\neq0\\x+1\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq1\\x\neq-1\end{cases}$

នាំឱ្យ $D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

លីមីត $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=0$

$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=+\infty$

$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=+\infty$

$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=+\infty$

$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=0$

អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ នោះ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim_{x\to\pm1}f(x)=+\infty$ នោះ $x=\pm$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ដេរីវេ

$$f'(x)=-2\cdot\frac{(x-1)'}{(x-1)^3}-2\frac{(x+1)'}{(x+1)^3}$$

$$=-2\left[\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x+1)^3}\right]$$

$$=-2\left[\frac{(x+1)^3+(x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)^3}\right]$$

$$=-2\left[\frac{x^3+3x^2+3x+1+x^3-3x^2+3x-1}{(x-1)^3(x+1)^3}\right]$$

$$=-2\left[\frac{2x^3+6x}{(x-1)^3(x+1)^3}\right]=\frac{-4x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

ឱ្យ $f'(x)=0$ សមមូល $\frac{-4x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3}=0$

ដោយ $\forall x\in D_f$, $x^2+3>0$, $x-1\neq 0$, $x+1\neq 0$

នាំឱ្យ $-4x=0$ នោះ $x=0$

តារាងសញ្ញា $f(x)$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$-4x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
x^2+3	$+$		$+$		$+$		$+$
$(x-1)^3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x+1)^3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f'(x)=\frac{-4x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3}$	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$

ត្រង់ $x=0$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាស្មើ $f(0)=2$ ។

តារាងអថេរភាព

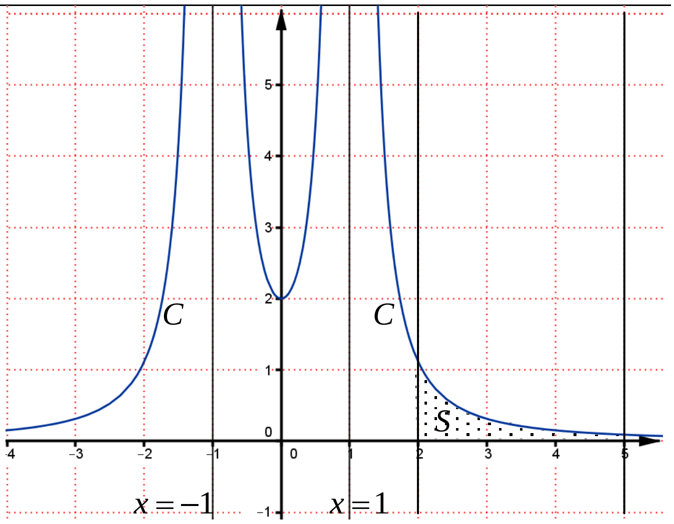
x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘ 0

សង់ខ្សែកោង (C) តាងក្រាបអនុគមន៍ f

ម្យ៉ាងទៀត ដោយ $f(-x)=\frac{1}{(-x-1)^2}+\frac{1}{(-x+1)^2}$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}=f(x)$$

នោះ f ជាអនុគមន៍គូ ដែលមានអ័ក្ស $y'y$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ



ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C)

បន្ទាត់ $x=2$ និង $x=5$

តាមក្រាប ផ្នែកប្លង់ដែលត្រូវគណនាផ្ទៃស្ថិតនៅលើអ័ក្ស $x'ox$

$$S=\int_2^5 f(x)dx=\int_2^5\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\int_2^5\left(\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}+\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]_2^5$$

$$=\left(-\frac{1}{5-1}-\frac{1}{5+1}\right)-\left(-\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+1}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+1+\frac{1}{3}=\frac{-3-2+12+4}{12}=\frac{11}{12}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់គឺ $S=\frac{11}{12}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ១៥ តុលា ២០០៣

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. សរសេរសចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $1+i\sqrt{3}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $|z|-z=1+2i$, (z ជាចំនួនកុំផ្លិច) ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. គណនាដេរីវេទី 5 នៃអនុគមន៍ $f(x)=x^5-2x^4+3x^3-2$ ។

ខ. កំណត់ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $h(x)=x^n$, $(n\in\mathbb{N}^*)$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=\cos x$ ដែលខ្សែកោងតាង $F(x)$ កាត់តាមចំណុច $A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. រកចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ $y''-3y'+2y=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=3$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យប្លង់ពីរ (α) និង (β) មានសមីការរៀងគ្នាគឺ : $3x-2y+2z-5=0$ និង $4x+5y-z+1=0$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្លង់ (α) អរតូកូណាល់ប្លង់ (β) ។

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ ដែលជាប្រសព្វនៃប្លង់ (α) និង (β) ។ **(២ពិន្ទុ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{x^2-4x+3}$ ។

ក. រកតម្លៃនៃ a និង b ដោយដឹងថាអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 4 ត្រង់ $x=2$ ។

ខ. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ចំពោះតម្លៃនៃ a និង b ដែលបានរកឃើញ ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០៣

I. ក. សរសេរសចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $1+i\sqrt{3}$ (មាន $r=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$)

$=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

គេមាន $|z|-z=1+2i$ និង z ជាចំនួនកុំផ្លិច

គេតាង $z=a+bi$ នោះ $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

គេបាន $\sqrt{a^2+b^2}-(a+bi)=1+2i$

$\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)+(-b)i=1+2i$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-a=1\\ b=-2\end{cases}$

$\begin{cases}\sqrt{a^2+4}-a=1 \ (1)\\ b=-2\end{cases}$

តាម (1) $\sqrt{a^2+4}=a+1$ (លើកជាការេ)

$a^2+4=a^2+2a+1$

$a=\dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{z=\dfrac{3}{2}-2i}$ ។

II. ក. គណនាដេរីវេទី 5 នៃអនុគមន៍ f

គេមាន $f(x)=x^5-2x^4+3x^3-2$

$f(x)=x^5-2x^4+3x^3-2$

$f'(x)=5x^4-8x^3+9x^2$

$f''(x)=20x^3-24x^2+18x$

$f'''(x)=60x^2-48x+18$

$f^{(4)}(x)=120x-48$

$f^{(5)}(x)=120$

ដូចនេះ ដេរីវេទី 5 គឺ $\boxed{f^{(5)}(x)=120}$ ។

ខ. កំណត់ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $h(x)=x^n$

$h'(x)=nx^{n-1}$

$h''(x)=n(n-1)x^{n-2}$

$h'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$h^{(4)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$

....

$h^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)\times\ldots\times 2\times 1\times x^{n-n}=n!$

ដូចនេះ ដេរីវេទី n គណនាបាន $\boxed{h^{(n)}(x)=n!}$ ។

III. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេបាន $F(x)=\int f(x)dx=\int\cos x dx=\sin x+c$

ដោយ ខ្សែកោងតាង $F(x)$ កាត់តាមចំណុច $A\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$

គេបាន $\sin\dfrac{\pi}{2}+c=0 \ \Rightarrow\ c=-1$

ដូចនេះ ព្រីមីទីវគណនាបានគឺ $\boxed{F(x)=\sin x-1}$ ។

IV. រកចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

គេមាន $y''-3y'+2y=0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2-3\lambda+2=0$

តាមករណីពិសេស $a+b+c=0$ នោះ $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$

ចម្លើយទូទៅរាង $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$, A, B ថេរ

គេបាន $y=Ae^{x}+Be^{2x}$

នាំឱ្យ $y'=Ae^{x}+2Be^{2x}$

ដោយ $\begin{cases}y(1)=1\\ y'(1)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ae+Be^2=1 & (1)\\ Ae+2Be^2=3 & (2)\end{cases}$

យក $(2)-(1)$ គេបាន $Be^2=2\ \Rightarrow\ B=2e^{-2}$

តាម (1) $Ae+2e^{-2}\cdot e^2=1\ \Rightarrow\ A=-e^{-1}$

គេបាន $y=Ae^x+Be^{2x}$

$=-e^{-1}\cdot e^x+2e^{-2}\cdot e^{2x}$

$=-e^{x-1}+2e^{2x-2}$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ

$\boxed{y=-e^{x-1}+2e^{2x-2}}$ ។

V. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្លង់ (α) អរតូកូណាល់ប្លង់ (β)

គេមាន $(\alpha): 3x-2y+2z-5=0$

មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_1=(3\,,-2\,,2)$

$(\beta): 4x+5y-z+1=0$

មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_2=(4\,,5\,,-1)$

បើ $(\alpha)\perp(\beta)$ លុះត្រាតែ $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$ នោះ $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$

ដោយ $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=xx'+yy'+zz'$

$=(3)(4)+(-2)(5)+(2)(-1)$

$=12-10-2=0$ ពិត

ដូចនេះ **ប្លង់ (α) អរតូកូណាល់ប្លង់ (β)** ។

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់

តាង $\ell:\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\,,\ t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+ct\end{cases}$ ជាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់

ប្រសព្វនៃប្លង់ (α) និង (β)

គេមាន $\begin{cases}(\alpha): 3x-2y+2z-5=0\\(\beta): 4x+5y-z+1=0\end{cases}$ (គេយក $z=t$)

$$\begin{cases}3x-2y=5-2t & \times 5\\ 4x+5y=t-1 & \times 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}15x-10y=25-10t\\ 8x+10y=2t-2\end{cases}$$

$$23x=23-8t \quad\Rightarrow\quad x=1-\frac{8}{23}t$$

ដោយ $3x-2y=5-2t$

$$3\left(1-\frac{8}{23}t\right)-2y=5-2t$$

$$3-\frac{24}{23}t-2y=5-2t$$

$$69-24t-46y=115-46t$$

$$46y=-46+22t$$

$$y=-1-\frac{11}{23}t$$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតគឺ $\begin{cases}x=1-\dfrac{8}{23}t\\ y=-1-\dfrac{11}{23}t\quad,\ t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$ ។

VI. ក. រកតម្លៃនៃ a និង b

ដោយ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 4 ត្រង់ $x=2$

គេបាន $\begin{cases}f'(2)=0\\ f(2)=4\end{cases}$

គេមាន $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{x^2-4x+3}$ នោះគេបាន ៖

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x^2-4x+3)-(2x-4)(ax^2+bx)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$f'(2)=\frac{(4a+b)(2^2-4\cdot2+3)-(4-4)(ax^2+bx)}{(2^2-4\cdot2+3)^2}$$

$$=\frac{(4a+b)(-1)}{(-1)^2}=-4a-b$$

នាំឱ្យ $\begin{cases}f'(2)=-4a-b=0\\ f(2)=\dfrac{a\cdot2^2+b\cdot2}{2^2-4\cdot2+3}=4\end{cases}$

$$\begin{cases}-4a-b=0\\-4a-2b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-4\\a=1\end{cases}$$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $\boxed{a=1\,,\,b=-4}$ ។

ខ. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f

ចំពោះ $a=1\,,\,b=-4$

គេបាន $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}=\dfrac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}$

ដែនកំណត់ $x^2-4x+3\neq0$ នោះ $x\neq1\,,\,x\neq3$

ដូចនេះ $D=(-\infty\,,1)\cup(1\,,3)\cup(3\,,+\infty)$

លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}=1$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}=\frac{1(-3)}{0^-(-2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}=\frac{1(-3)}{0^+(-2)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}=\frac{3(-1)}{2(0^-)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}=\frac{3(-1)}{2(0^+)}=-\infty$$

អាស៊ីមតូត

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ដេរីវេ

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x^2-4x+3)-(2x-4)(ax^2+bx)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$=\frac{(2x-4)(x^2-4x+3)-(2x-4)(x^2-4x)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$=\frac{(2x-4)(x^2-4x+3-x^2+4x)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$=\frac{6(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}$$

ឱ្យ $f'(x)=0 \iff \dfrac{6(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}=0$

$\forall x\in D$, $(x^2-4x+3)^2>0$ ជានិច្ច

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x-2$ ដែលមានឫស $x=2$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$ 1	2	3 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ ‖ $-$	0	$+$ ‖ $+$

ត្រង់ $x=2$, $f'(x)=0$ ហើយប្ដូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាមួយស្មើ $f(2)=-4$

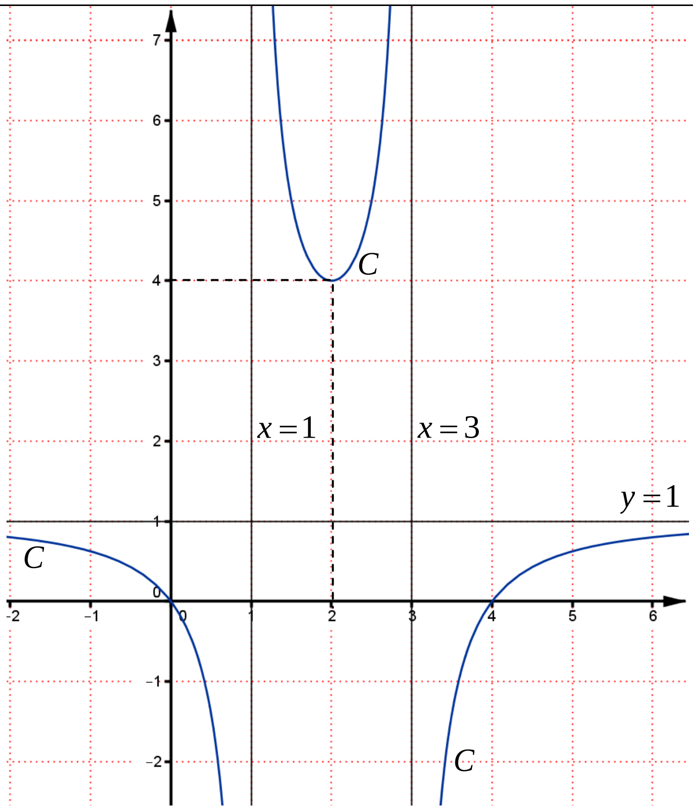
តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$f(x)$	1 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗ 1

សង់ក្រាប និងអាស៊ីមតូត

តារាងតម្លៃលេខនៃក្រាប C

x	0	2	4
y	0	-4	0



ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១៧ តុលា ២០០៤

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. រកចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យបំពេញលក្ខខណ្ឌ $(x+y)+(2x-y)i=2-5i$ ។

ខ. ចូរសរសេរ $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}$ ជារាង $a+bi$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. រកក្រឡាផ្ទៃ S ដែលកំណត់ដោយខ្សែកោង $y=\sin x$ ចំពោះ $0\le x\le 3\pi$ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $I=\int x\cos x dx$, $J=\int \frac{5}{5x-7}dx$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់គេមានបីចំណុច $A(1,4,2)$, $B(2,1,3)$, $C(-2,2,-1)$ ។ គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃ ΔABC រួចបង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណកែង ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេសរសេរលេខ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 រៀងគ្នាលើកាត់ 9 ។ គេចាប់យកកាត់នេះម្តងមួយៗពីក្នុងថង់ ចំនួន 3 កាត់ មកតម្រៀបតាមលំដាប់ដែលចាប់បាន ។

ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យកាត់ទាំងបីដែលចាប់បាន បង្កើតបានជាចំនួន 123 ។

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យកាត់ទាំងបីដែលចាប់បាន បង្កើតបានជាចំនួនចែកដាច់នឹង 125 ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. គណនាតម្លៃអតិបរមា អប្បបរមា និងរកកូអរដោនេចំណុចរបត់ របស់ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=3xe^{-x^2}$ ។ សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះ ។ **(២ពិន្ទុ)**

VI. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'+2y=x^2$ ។

ក. កំណត់អនុគមន៍ពហុធា g មានសមីការដឺក្រេទី២ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) លុះត្រាតែ $f-g$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'): y'+2y=0$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ (E') ។ ទាញរកចម្លើយនៃសមីការ (E) ។ **(២ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០៤

I. **ក. រកចំនួនពិត** x **និង** y

គេមាន $(x+y)+(2x-y)i=2-5i$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=-5 \end{cases}$

បូកអង្គ $3x=-3 \Rightarrow x=-1$

ដោយ $x+y=2 \Rightarrow y=2-x=2-(-1)=3$

ដូចនេះ រកបាន $\boxed{x=-1\,,\ y=3}$ ។

ខ. សរសេរ $(1+i\sqrt{3})^{10}$ **ជារាង** $a+bi$

តាង $Z=1+i\sqrt{3}$ មាន $r=\sqrt{1+\sqrt{3}^2}=2$

នាំឱ្យ $Z=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

គេបាន $Z^{10}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{10}$

$=2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$

$=1024\left[\cos\left(2\pi+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

$=1024\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

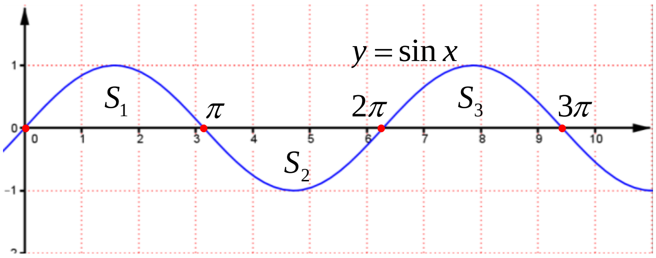
$=1024\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=-512-512\sqrt{3}\,i$

ដូចនេះ $\boxed{(1+i\sqrt{3})^{10}=-512-512\sqrt{3}\,i}$ ។

II. **ក. រកក្រឡាផ្ទៃ** S

ដើម្បីដឹងថា ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=\sin x$ នៅខាងលើ ឬ ខាងក្រោមអ័ក្សអាប់ស៊ីស គេត្រូវគូសខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=\sin x$ ចំពោះ $0\le x\le 3\pi$



តាមរូប $S=S_1-S_2+S_3$

$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,dx$

$=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}-\left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}+\left[-\cos x\right]_{2\pi}^{3\pi}$

$=-\cos\pi+\cos 0+\cos 2\pi-\cos\pi-\cos 3\pi+\cos 2\pi$

$=-(-1)+1+1+1-(-1)+1=6$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផ្ទៃគណនាបាន } S=6 \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

$\mathbf{I}=\int x\cos x\,dx$ (តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក)

គេតាង $u=x$ នោះ $du=dx$

$dv=\cos x\,dx$ នោះ $v=\sin x$

តាមរូបមន្ត $\int udv=uv-\int vdu$

$\mathbf{I}=\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$

$=x\sin x-(-\cos x)+c$

$=x\sin x+\cos x+c$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I}=x\sin x+\cos x+c}$ ។

$\mathbf{J}=\int\frac{5}{5x-7}dx=\int\frac{(5x-7)'}{5x-7}dx=\ln|5x-7|+c$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{J}=\ln|5x-7|+c}$ ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

III. ➢គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃ ΔABC

តាមរូបមន្ត $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

គេមាន $A(1\,,4\,,2)\,,\ B(2\,,1\,,3)\,,\ C(-2\,,2\,,-1)$

នោះ $\overrightarrow{AB}=(1\,,-3\,,1)$, $\overrightarrow{AC}=(-3\,,-2\,,-3)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 1\\ -3 & -2 & -3\end{vmatrix}=11\vec{i}-0\vec{j}-11\vec{k}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$=\frac{1}{2}\sqrt{11^2+0^2+(-11)^2}=\frac{11\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=\frac{11\sqrt{2}}{2}\text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

➤ **បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណកែង**

ដោយ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=xx'+yy'+zz'$

$=(1)(-3)+(-3)(-2)+(1)(-3)=0$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ នោះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ត្រូវបានបង្ហាញ ។

IV. **ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យកាក់បង្កើតបានជាចំនួន 123**

ដោយ គេចាប់យកកាក់នេះម្តងមួយៗពីក្នុងថង់ចំនួនបី

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាចថយចុះម្តងមួយ

ហើយ លេខនីមួយៗមានមួយលេខដូចគ្នាជាករណីស្រប

គេបាន $P(123)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{504}$

ដូចនេះ $P(123)=\frac{1}{504}$ ។

ខ. រកប្រូបាបបង្កើតបានជាចំនួនចែកដាច់នឹង 125

ចំនួនដែលអាចចែកដាច់នឹង 125 មាន

125 , 250 , 375 , 500 , 625 , 750 , 875

តែចំនួនដែលមានលេខ 0 មិនអាចយកបាន នោះនៅសល់តែ

125 , 375 , 625 , 875 គេបានប្រូបាប ៖

$P(\text{ចែកដាច់}125)$

$=P(125)+P(375)+P(625)+P(875)$

$=\frac{1}{504}+\frac{1}{504}+\frac{1}{504}+\frac{1}{504}=\frac{4}{504}=\frac{1}{126}$

ដូចនេះ $P(\text{ចែកដាច់}125)=\frac{1}{126}$ ។

V. **ក. គណនាតម្លៃអតិបរមា អប្បបរមា**

គេមាន $y=3xe^{-x^2}$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

ដេរីវេ $y'=(3x)'\cdot e^{-x^2}+3x\left(e^{-x^2}\right)'$

$=3e^{-x^2}-6x^2e^{-x^2}$

$=3e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$

ឱ្យ $y'=0 \Leftrightarrow 3e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)=0$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ 3e^{-x^2}>0$ នោះ y' សញ្ញាដូច $1-2x^2$

នាំឱ្យ $\left(1-2x^2\right)=0$ នោះ $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

គេបាន $y\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$y'=3e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$	$-$	0	$+$	0	$-$

• ត្រង់ $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y'=0$ និងប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា y មានតម្លៃអប្បបរមាមួយស្មើ $-\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ ។

• ត្រង់ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y'=0$ និងប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា y មានតម្លៃអតិបរមាមួយស្មើ $\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ ។

➤ **រកកូអរដោនេចំណុចរបត់ របស់ខ្សែកោង**

គេដឹងថា អាប់ស៊ីសនៃចំណុចរបត់ គឺជាឫសនៃសមីការ $y''=0$

គេមាន $y'=3e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$

$y''=-6xe^{-x^2}\left(1-2x^2\right)+(-4x)\left(3e^{-x^2}\right)$

$=\left(-2x\left(1-2x^2\right)-4x\right)\left(3e^{-x^2}\right)$

$=3e^{-x^2}\left(4x^3-6x\right)$

$=6xe^{-x^2}\left(2x^2-3\right)$

ឱ្យ $y''=0 \Leftrightarrow 6xe^{-x^2}\left(2x^2-3\right)=0$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ 6e^{-x^2}>0$ នោះ $x\left(2x^2-3\right)=0$

នាំឱ្យ $x=0\ ,\ x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

គេបាន $y(0)=3\cdot 0\cdot e^0=0$

$y\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=3\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\cdot e^{-\frac{3}{2}}=\pm\frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$

ដូចនេះ ចំណុចរបត់មានបីតាងដោយ I មាន

$I_1(0,0)\ ,\ I_2\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)\ ,\ I_2\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

ខ. សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះ

ដើម្បីឱ្យងាយស្រួលក្នុងការសង់ក្រាប គេត្រូវមានតារាងអថេរភាព

$\lim\limits_{x\to-\infty}3xe^{-x^2}$ តាង $t=-x$, បើ $x\to-\infty$ នោះ $t\to+\infty$

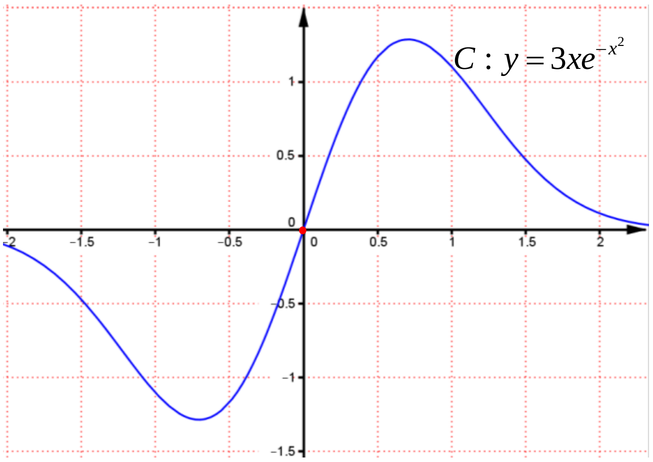
$\lim\limits_{t\to+\infty}-3te^{-t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{-3t}{e^{t^2}}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}3xe^{-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{e^{x^2}}=0$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	↗	$\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	↘	0

គេសង់ក្រាបបានដូចខាងក្រោម



VI. ក. កំណត់អនុគមន៍ពហុធា g មានសមីការដឺក្រេទី២

ពហុធាដឺក្រេទី២ នៃ g មានរាង $g(x)=ax^2+bx+c$

គេបាន $g'(x)=2ax+b$

ដោយ g ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E): y'+2y=x^2$

គេបាន $g'+2g=x^2$

$(2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=x^2$

$2ax^2+(2a+2b)x+(b+2c)=x^2+0x+0$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}2a=1\\2a+2b=0\\b+2c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1/2\\b=-1/2\\c=1/4\end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{g(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $f-g$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'): y'+2y=0$

បើ $f-g$ ជាចម្លើយនៃ $(E'): y'+2y=0$

គេបាន $(f-g)'+2(f-g)=0$

$f'-g'+2f-2g=0$

$f'+2f=g'+2g$

$f'+2f=x^2$

ដូចនេះ: $\boxed{f \text{ ជាចម្លើយនៃ } (E): y'+2y=x^2}$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (E')

គេមាន $(E'): y'+2y=0$

មានចម្លើយទូទៅរាង $y_c=Ae^{-ax}$, A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ (E') មានចម្លើយ $\boxed{y_c=Ae^{-2x}}$ ។

➤ទាញរកចម្លើយនៃសមីការ (E)

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $(E): y'+2y=x^2$

មានរាង $f=$ ចម្លើយទូទៅអូម៉ូសែន $+$ ចម្លើយពិសេស

$f=y_c+g$

$f=Ae^{-2x}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

ដូចនេះ (E) មានចម្លើយ $\boxed{f=Ae^{-2x}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ០៣ វិច្ឆិកា ២០០៥

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $-2-2i$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $I=\int(2\sin x+3\cos x)dx$, $J=\int\dfrac{dx}{x^2-5x+6}$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2-e^x$ ដែល $F(0)=1$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-3y'+2y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើនឹង 1 ត្រង់ $x=1$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. សរសេរសមីការនៃប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច $M(1,2,-3)$ និងស្របជាមួយប្លង់ $(Q): 2x-4y-z+4=0$ រួចគណនាចម្ងាយរវាងប្លង់ទាំងពីរ ។ **(១ពិន្ទុ)**

V. គេមានតួលេខ $0,1,2,3,4$ ។ ដោយគ្រាន់តែប្រើតួលេខទាំងនេះ តើគេអាចបង្កើតចំនួនបានប៉ុន្មាន ដែលធំជាង 2000 ?
(បញ្ជាក់ : ក្នុងចំនួននីមួយៗគ្មានតួលេខដដែលពីរដងទេ) **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ae^x+b$ មានខ្សែកោង (C) ។

ក. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) កាត់តាមគល់ O នៃតម្រុយអរតូណរមេ និងបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុចនេះ ជាបន្ទាត់ពុះទី១ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ f ចំពោះតម្លៃនៃ a និង b ដែលរកឃើញ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្ស $x'Ox$ បន្ទាត់ $x=-1$ និង $x=1$ ។ **(៣ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០៥

I. ក. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $-2-2i$

គេមាន $-2-2i$ (មាន $r=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$)

$$=2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{2\sqrt{2}}-\frac{2}{2\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}i\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{-2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}i\right)}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

គេមាន $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$

$$\Delta=\left[-(5-i)\right]^2-4(2+i)(2-2i)$$

$$=25-10i+i^2-4\left(4-4i+2i-2i^2\right)$$

$$=25-10i-1-24+8i=-2i$$

ដោយ $2i=1-2i-1=1-2i+i^2=(1-i)^2$

នាំឱ្យ $x=\frac{5-i\pm(1-i)}{2(2+i)}=\left[\begin{array}{l}\frac{2}{2+i}\\ \frac{3-i}{2+i}\end{array}\right.\Rightarrow x=\left[\begin{array}{l}\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i\\ \frac{7}{5}-\frac{2}{5}i\end{array}\right.$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i\ ,\ x=\frac{7}{5}-\frac{2}{5}i}$ ។

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

$$\mathbf{I}=\int(2\sin x+3\cos x)dx$$

$$=2\int\sin xdx+3\int\cos xdx$$

$$=-2\cos x+3\sin x+c$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I}=-2\cos x+3\sin x+c}$, c ជាចំនួនថេរ ។

$$\mathbf{J}=\int\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}$$

$$=\int\frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)}dx$$

$$=\int\frac{1}{(x-3)}dx-\int\frac{1}{(x-2)}dx$$

$$=\ln|x-3|-\ln|x-2|+c=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+c$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{J}=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+c}$, c ជាចំនួនថេរ ។ (គ្រូប-០៥)

ខ. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេបាន $F(x)=\int f(x)dx=\int\left(x^2-e^x\right)dx$

$$=\frac{x^3}{3}-e^x+c$$

ដោយ $F(0)=1$ សមមូល $\frac{0^3}{3}-e^0+c=1\Rightarrow c=2$

ដូចនេះ ព្រីមីទីវគណនាបាន $\boxed{F(x)=\frac{x^3}{3}-e^x+2}$ ។

III. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

គេមាន $(E):\ y''-3y'+2y=0$

សមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2-3\lambda+2=0$ មាន $a+b+c=0$

តាមករណីពិសេសសមីការមានឫស $\lambda_1=1\ ,\ \lambda_2=2$

ចម្លើយទូទៅនៃ $(E):\ y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$, $A\ ,\ B$ ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{y=Ae^x+Be^{2x}\text{ ជាចម្លើយទូទៅនៃ }(E)}$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

ដោយ $y=Ae^x+Be^{2x}$ នោះ $y'=Ae^x+2Be^{2x}$

គេដឹងថា អនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើនឹង 1 ត្រង់ $x=1$

គេបាន $\begin{cases}y'(1)=0\\ y(1)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ae+2Be^2=0\\ Ae+Be^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-\frac{1}{e^2}\\ A=\frac{2}{e}\end{cases}$

នាំឱ្យ $y=\frac{2}{e}e^x-\frac{1}{e^2}e^{2x}=2e^{x-1}-e^{2x-2}$

ដូចនេះ (E) មានចម្លើយពិសេស $\boxed{y=2e^{x-1}-e^{2x-2}}$ ។

IV. ➤សរសេរសមីការនៃប្លង់ (P)

សមីការប្លង់ $(P):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ (P) កាត់តាមចំណុច $M(1\ ,2\ ,-3)$

នោះ $x_0=1\ ,\ y_0=2\ ,\ z_0=-3$

និង $(P)\parallel(Q):2x-4y-z+4=0$ នាំឱ្យ (P)

មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2,-4,-1)$

នោះ $a=2\ ,\ b=-4\ ,\ c=-1$

ដូចនេះ $\boxed{(P):2(x-1)-4(y-2)-(z+3)=0}$ ។

➤គណនាចម្ងាយរវាងប្លង់ទាំងពីរ

របៀបទី១ តាមរូបមន្ត $d\left((P),(Q)\right)=\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $(P):2(x-1)-4(y-2)-(z+3)=0$

$2x-4y-z+3=0$ នោះ $d_1=3$

$(Q):2x-4y-z+4=0$ នោះ $d_2=4$

នាំឱ្យ $d\left((P),(Q)\right)=\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$=\dfrac{|3-4|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$

ដូចនេះ: | ចម្ងាយប្លង់ទាំងពីរគឺ $d=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$ ឯកតាប្រវែង | ។

របៀបទី២ យកចំណុច $A(x,y,z)\in(P)$

គេយក $x=y=0$ ជំនួសក្នុង (P) ដើម្បីរក z

$(P):2(0-1)-4(0-2)-(z+3)=0$

$-2+8-z-3=0$ នោះ $z=3$

គេបាន $A(0,0,3)\in(P)$

ដោយ $d\left((P),(Q)\right)=d\left(A,(Q)\right)$

តែ $d\left(A,(Q)\right)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $A(0,0,3)\Rightarrow x_0=y_0=0\,,\ z_0=3$

$(Q):2x-4y-z+4=0$ នោះ

$a=2\,,\ b=-4\,,\ c=-1$

$d\left(A,(Q)\right)=\dfrac{|0+0-3+4|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$

ដូចនេះ: | ចម្ងាយប្លង់ទាំងពីរគឺ $d=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$ ឯកតាប្រវែង | ។

V. តើគេអាចបង្កើតចំនួនបានប៉ុន្មាន ដែលធំជាង 2000 ?(គ្រូប.០៥)

ដោយលេខតាមខ្ទង់ដែលត្រូវប្រើមាន៥លេខ $0,1,2,3,4$

នោះចំនួនដែលធំជាង 2000 អាចជាលេខ 4 ខ្ទង់ ឬ 5 ខ្ទង់

• ចំពោះលេខ 4 ខ្ទង់ដែលធំជាង 2000 គឺ

ខ្ទង់ពាន់ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់រយ មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់ដប់ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់រាយ មាន 2 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ផលគុណ $3\times4\times3\times2=72$ ចំនួន

• ចំពោះលេខ 5 ខ្ទង់ដែលធំជាង 2000 គឺ

ខ្ទង់ម៉ឺន មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់ពាន់ មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់រយ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់ដប់ មាន 2 ជម្រើស

ខ្ទង់រាយ មាន 1 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ផលគុណ $4\times4\times3\times2\times1=96$ ចំនួន

សរុបចំនួនដែលធំជាង $2000=72+96=168$ ចំនួន

ដូចនេះ: | ចំនួនដែលអាចបង្កើតបានមាន 168 ចំនួន | ។

VI. ក. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b

គេមាន $f(x)=ae^x+b$ មានខ្សែកោង (C)

នាំឱ្យ $f'(x)=ae^x$

ដោយ (C) កាត់តាមគល់ O នាំឱ្យ $f(0)=0$

$ae^0+b=0$ ឬ $b=-a\ (1)$

ហើយ បន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច $O(0,0)$នេះ

ជាបន្ទាត់ពុះទី១ $y=x$ នាំឱ្យ $f'(0)=1$

$ae^0=1\Rightarrow a=1$ ជំនួសក្នុង (1) $b=-1$

ដូចនេះ: | តម្លៃកំណត់បាន $a=1\,,\ b=-1$ | ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C)

ចំពោះ $a=1\,,\ b=-1$ គេបាន $f(x)=e^x-1$

ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}=(-\infty\,,+\infty)$

លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-1\right)=0-1=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-1\right)=+\infty-1=+\infty$

អាស៊ីមតូត ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ នោះបន្ទាត់ $y=-1$

ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃខ្សែកោង (C) ខាង $-\infty$

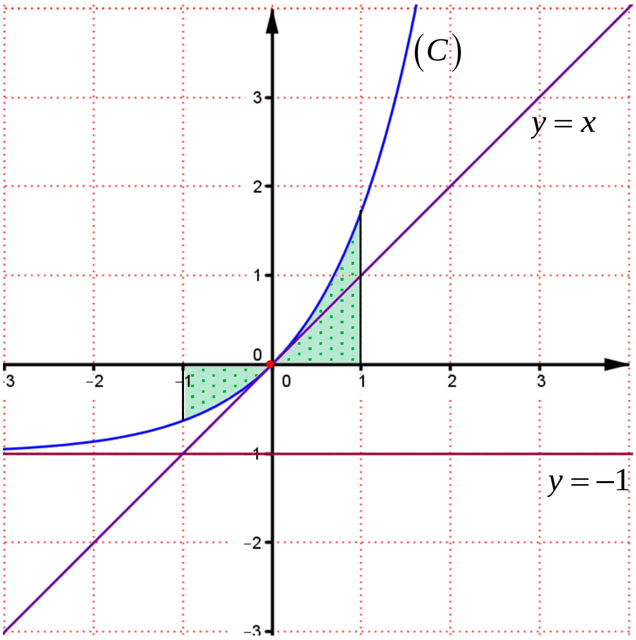
ដេរីវេ $f'(x)=e^x$ នោះ $f'(x)=e^x>0\,,\ \forall x\in D$

នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច និងគ្មានបរមាទេ

តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 ↗ $+\infty$

➢សង់ខ្សែកោង (C)



គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់

តាមក្រាប គេបានផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ដូចខាងក្រោម ៖

$$S=-\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}\left(e^x-1\right)dx+\int_{0}^{1}\left(e^x-1\right)dx$$

$$=-\left[e^x-x\right]_{-1}^{0}+\left[e^x-x\right]_{0}^{1}$$

$$=-\left[(1-0)-\left(\frac{1}{e}+1\right)\right]+\left[(e-1)-(1-0)\right]$$

$$=\frac{1}{e}+e-2$$

ដូចនេះ: ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ $S=\frac{1}{e}+e-2$ ឯកតាផ្ទៃ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ១៣ តុលា ២០០៦

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយវិសមីការ $2^x+2^{3-x}\le 9$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x , y គេបាន : $x^2\left(1+\sin^2 y\right)+2x\left(\sin y+\cos y\right)+1+\cos^2 y>0$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $(m+1)x^2-2mx+4(m+1)=0$ មានឫសដែលធំជាងគេនៅចន្លោះ $(-1\,,1)$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

III. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E):\ 2y''-3y'+y=0$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយរបស់សមីការ (E) ដើម្បីឱ្យក្រាបតាងអនុគមន៍ g ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (d) សមីការ $y=-\dfrac{1}{2}x$

នៅត្រង់ចំណុច $O(0\,,0)$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. កោណមួយមានកម្ពស់ 15cm និងកាំបាត 6cm ។ រកកម្ពស់ និងកាំបាតនៃស៊ីឡាំងចារឹកក្នុងកោណនេះ ដើម្បីឱ្យវាមានមាឌអតិបរមា ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច $A(1\,,1\,,0)$, $B(0,\,2\,,2)$, $C(1,-2,\,3)$ និង $D(1\,,-2\,,0)$ ។ រកសមីការស្វ៊ែដែលកាត់តាមបួនចំណុច A , B , C និង D ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=(ax+1)^2$ ចំពោះ $x<2$ និង $f(x)=-ax$ ចំពោះ $x\ge 2$ ។

ចូររកតម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់នៅត្រង់ $x=2$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

VII. អនុគមន៍ f កំណត់លើ $D=[2\,,+\infty)$ ដែល $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{(2x-3)(x-1)^2}$ ។

ក. គណនា a , b ដែល $f(x)=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{(2x-3)}$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $g(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$, $h(x)=\dfrac{1}{2x-3}$ ។

គ. ទាញរក $I=\int_2^3 f(x)\,dx$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០៦

I. ក. ដោះស្រាយវិសមីការ

គេមាន $2^x+2^{3-x}\le 9$

$2^x+\dfrac{8}{2^x}-9\le 0$

គេតាង $t=2^x$ ដែល $t>0$

គេបាន $t+\dfrac{8}{t}-9\le 0$ គុណនឹង t មិនប្តូរទិសដៅ)

$t^2-9t+8\le 0$

ឱ្យ $t^2-9t+8=0$ តាមករណីពិសេស $t=1$, $t=8$

តារាងសញ្ញា

t	0	1		8	$+\infty$
$t^2-9t+8\le 0$	$+$	0	$-$	0	$+$

តាមតារាង $1\le t\le 8$ សមមូល $1\le 2^x\le 8$

ឬ $2^0\le 2^x\le 2^3$ នាំឱ្យ $0\le x\le 3$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $\boxed{0\le x\le 3}$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x , y គេបាន $f(x)>0$

$f(x)=x^2(1+\sin^2 y)+2x(\sin y+\cos y)+1+\cos^2 y$

មាន $\Delta'=(\sin y+\cos y)^2-(1+\sin^2 y)(1+\cos^2 y)$

$=\sin^2 y+2\sin y\cos y+\cos^2 y$

$-(1+\cos^2 y+\sin^2 y+\sin^2 y\cos^2 y)$

$=2\sin y\cos y-1-\sin^2 y\cos^2 y$

$=-(1-\sin y\cos y)^2$

ដោយ $\forall y\in\mathbb{R}$, $\sin y\cos y\ne 1$

នោះ $\Delta'=-(1-\sin y\cos y)^2<0$, $\forall y\in\mathbb{R}$

គេបាន កន្សោមមាន $\begin{cases}\Delta'<0\\ a=1+\sin^2 y>0\end{cases}$ នាំឱ្យ $f(x)>0$

ដូចនេះ $\boxed{x^2(1+\sin^2 y)+2x(\sin y+\cos y)+1+\cos^2 y>0}$

II. កំណត់តម្លៃនៃ m

គេមាន $(m+1)x^2-2mx+4(m+1)=0$

គេតាង $f(x)=(m+1)x^2-2mx+4(m+1)$

ដោយ សមីការមានឫសដែលធំជាងគេនៅចន្លោះ $(-1,1)$

លុះត្រាតែ $f(-1)\times f(1)<0$

ដោយ $f(-1)=(m+1)(-1)^2-2m(-1)+4(m+1)$

$=m+1+2m+4m+4=7m+5$

$f(1)=(m+1)(1)^2-2m(1)+4(m+1)$

$=m+1-2m+4m+4=3m+5$

គេបាន $(7m+5)(3m+5)<0$ (ជាត្រីធាដឺក្រេទី២)

គេឱ្យ $(7m+5)(3m+5)=0$ នោះ $m=-\dfrac{5}{7}$, $m=-\dfrac{5}{3}$

តារាងសញ្ញា

t	$-\infty$	$-\dfrac{5}{3}$		$-\dfrac{5}{7}$	$+\infty$
$(7m+5)(3m+5)<0$	$+$	0	$-$	0	$+$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $\boxed{m\in\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{7}\right)}$ ។

III. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

គេមាន $(E):\ 2y''-3y'+y=0$

សមីការសម្គាល់ $2\lambda^2-3\lambda+1=0$ តាមករណីពិសេស

សមីការមានឫស $\lambda=1$, $\lambda=\dfrac{1}{2}$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ $g(x)=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$, A , B ថេរ

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $\boxed{g(x)=Ae^x+Be^{\frac{1}{2}x}}$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយរបស់សមីការ (E)

គេមាន $g(x)=Ae^x+Be^{\frac{1}{2}x}$ នោះ $g'(x)=Ae^x+\dfrac{B}{2}e^{\frac{1}{2}x}$

ដើម្បីឱ្យក្រាបតាងអនុគមន៍ g ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (d) សមីការ

$y=-\dfrac{1}{2}x$ នៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ លុះត្រាតែ

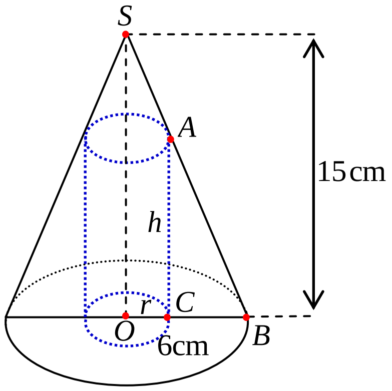
$\begin{cases}g'(0)=-\dfrac{1}{2}\\ g(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ae^0+\dfrac{B}{2}e^0=-\dfrac{1}{2}\\ Ae^0+Be^0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=1\\ A=-1\end{cases}$

ដូចនេះ ចម្លើយមួយនៃ (E) គឺ $\boxed{g(x)=-e^x+e^{\frac{1}{2}x}}$ ។

IV. រកកម្ពស់ និងកាំបាតនៃស៊ីឡាំងចារឹកក្នុងកោណនេះ

តាង h និង r ជាកម្ពស់ និងកាំនៃស៊ីឡាំង (គិតជា cm)

នាំឱ្យមាឌនៃស៊ីឡាំង $V=\pi r^2 h$



ដោយ ΔABC និង ΔSBO ជាត្រីកោណកែងមាន

$\angle B$ ជាមុំរួម នោះ $\Delta ABC\sim\Delta SBO$ (ម.ម)

វិបាក $\dfrac{AC}{SO}=\dfrac{BC}{BO}$ ឬ $\dfrac{h}{15}=\dfrac{6-r}{6}$ នោះ $h=\dfrac{5}{2}(6-r)$

គេបាន $V(r)=\pi r^2\times\dfrac{5}{2}(6-r)=\dfrac{5\pi}{2}(6r^2-r^3)$

$V'(r)=\dfrac{5\pi}{2}(12r-3r^2)$

$V''(r)=\dfrac{5\pi}{2}(12-6r)$

ដើម្បីឱ្យ V មានតម្លៃអតិបរមា លុះត្រាតែ $\begin{cases}V'(r)=0\\V''(r)<0\end{cases}$

គេបាន $\dfrac{5\pi}{2}(12r-3r^2)=0$ ឬ $r(12-3r)=0$

នាំឱ្យ $r=0$ មិនយក , $r=4\text{cm}$ យក

គេបាន $V''(4)=\dfrac{5\pi}{2}(12-6\cdot4)=-30\pi<0$ ពិត

$h=\dfrac{5}{2}(6-r)=\dfrac{5}{2}(6-4)=5\text{cm}$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{r=4\text{cm}\ ,\ h=5\text{cm}}$ ។

V. រកសមីការស្វ៊ែដែលកាត់តាមបួនចំណុច (ដូចគ្រូបឋម 2011)

គេមាន $A(1,1,0)$, $B(0,2,2)$,

$C(1,-2,3)$ និង $D(1,-2,0)$

សមីការស្វ៊ែរាង $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

$(S)\cap A$ គេបាន $(1-a)^2+(1-b)^2+c^2=r^2$ (1)

$(S)\cap B$ គេបាន $a^2+(2-b)^2+(2-c)^2=r^2$ (2)

$(S)\cap C$ គេបាន $(1-a)^2+(-2-b)^2+(3-c)^2=r^2$ (3)

$(S)\cap D$ គេបាន $(1-a)^2+(-2-b)^2+c^2=r^2$ (4)

គេយក $(3)-(4)$ គេបាន $(3-c)^2-c^2=0$

$(3-c-c)(3-c+c)=0\ \Rightarrow\ c=\dfrac{3}{2}$

គេយក $(1)-(4)$ គេបាន $(1-b)^2-(-2-b)^2=0$

$(1-b+2+b)(1-b-2-b)=0\ \Rightarrow\ b=-\dfrac{1}{2}$

តាម (2) $a^2+\left(2+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(2-\dfrac{3}{2}\right)^2=r^2$

$a^2+\dfrac{25}{4}+\dfrac{1}{4}=r^2$ នោះ $a^2+\dfrac{13}{2}=r^2$ (5)

តាម (1) $(1-a)^2+\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=r^2$

$1-2a+a^2+\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{4}=r^2$

$-2a+a^2+\dfrac{11}{2}=r^2$ (6)

យក $(5)-(6)$ $2a+1=0$ នាំឱ្យ $a=-\dfrac{1}{2}$

តាម (5) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{13}{2}=r^2\ \Leftrightarrow\ r^2=\dfrac{27}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{(S):\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{27}{4}}$ ។

VI. រកតម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់នៅត្រង់ $x=2$

គេមាន $f(x)=\begin{cases}(ax+1)^2 & \text{ចំពោះ } x<2\\ -ax & \text{ចំពោះ } x\geq2\end{cases}$

ដើម្បីឱ្យ អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=2$ លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=f(2)$

ដោយ $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(ax+1)^2=(2a+1)^2$

$\lim\limits_{x\to2^+}(-ax)=-2a$

$f(2)=-2\cdot a=-2a$

គេបាន $(2a+1)^2=-2a$

$4a^2+4a+1=-2a$

$4a^2+6a+1=0$

$\Delta'=3^2-4=5$ នោះ $a=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{4}$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បានគឺ $\boxed{a=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{4}}$ ។

VII.ក. គណនា $a\ ,\ b$

គេមាន $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4x+4}{\left(2x-3\right)\left(x-1\right)^2}$ និង

$$f\left(x\right)=\frac{a}{\left(x-1\right)^2}+\frac{b}{\left(2x-3\right)}$$

$$=\frac{a\left(2x-3\right)+b\left(x-1\right)^2}{\left(2x-3\right)\left(x-1\right)^2}$$

$$=\frac{2ax-3a+bx^2-2bx+b}{\left(2x-3\right)\left(x-1\right)^2}$$

$$=\frac{bx^2+\left(2a-2b\right)x+\left(-3a+b\right)}{\left(2x-3\right)\left(x-1\right)^2}$$

ដោយផ្ទឹមមេគុណត្រូវគ្នានៃអថេរ x

គេបាន $\begin{cases} b=1 \\ 2a-2b=-4 \\ -3a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases}$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{a=-1\ ,\ b=1}$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $g\left(x\right)$ និង $h\left(x\right)$

គេមាន $g\left(x\right)=\dfrac{-1}{\left(x-1\right)^2}$, $h\left(x\right)=\dfrac{1}{2x-3}$

គេតាង $G\left(x\right), H\left(x\right)$ ជាព្រីមីទីវរៀងគ្នានៃ $g\left(x\right), h\left(x\right)$

គេបាន $G\left(x\right)=\int g\left(x\right)dx$

$$=\int\frac{-1}{\left(x-1\right)^2}dx$$

$$=\int\frac{-\left(x-1\right)'}{\left(x-1\right)^2}dx=\frac{1}{x-1}+c_1\ ,\ c_1 \text{ ថេរ}$$

$$H\left(x\right)=\int h\left(x\right)dx$$

$$=\int\frac{1}{2x-3}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|2x-3\right|+c_2\ ,\ c_2 \text{ ថេរ}$$

ដូចនេះ ព្រីមីទីវរៀងគ្នានៃ $g\left(x\right)$ និង $h\left(x\right)$ គឺ ៖

$$\boxed{G\left(x\right)=\frac{1}{x-1}+c_1\ ,\ H\left(x\right)=\frac{1}{2}\ln\left|2x-3\right|+c_2}$$ ។

គ. ទាញរក $I=\int_2^3 f\left(x\right)dx$

$$I=\int_2^3 f\left(x\right)dx=\int_2^3\left(\frac{-1}{\left(x-1\right)^2}+\frac{1}{\left(2x-3\right)}\right)dx$$

$$=\int_2^3\frac{-1}{\left(x-1\right)^2}dx+\int_2^3\frac{1}{\left(2x-3\right)}dx$$

$$=\left[\frac{1}{x-1}\right]_2^3+\left[\frac{1}{2}\ln\left|2x-3\right|\right]_2^3$$

$$=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{2}\left(\ln 3-\ln 1\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\ln 3}{2}$$

ដូចនេះ ទាញរកបាន $\boxed{I=\dfrac{\ln 3}{2}-\dfrac{1}{2}}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១៦ តុលា ២០០៧

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យ $2xi-y=\dfrac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$ ។

ខ. គេឱ្យ $z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ ។ សរសេរ $(1+z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): g''(x)-5g'(x)+6g(x)=0$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ (E) ដែល $g(0)=0$ និង $g'(0)=1$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

III. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ ចំពោះ $x\neq 0$ និង $f(0)=\ln(m-1)$ ។ គណនាលីមីត $f(x)$ កាលណា x ខិតជិត 0 ។ កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់នៅត្រង់ $x=0$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. ក្នុងថង់មួយមានឃ្លី ស 3 និងឃ្លីខ្មៅ 5 ។ គេចាប់យកឃ្លីម្តង 3 ចេញពីក្នុងថង់ ។ រកប្រូបាបដែលគេអាចចាប់យកបានឃ្លី ស 2 និងឃ្លីខ្មៅ 1 ។ **(១ពិន្ទុ)**

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$ មានក្រាប (C) ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a , b , c ដើម្បីឱ្យ $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ ចំពោះ $x\neq 2$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

គ. បង្ហាញថាចំណុច $I(2\,,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ គេឱ្យប្លង់ (P) និងស្វ៊ែ (S) ដែលមានសមីការ $(P): x+2y+2z+5=0$, $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត និងប្រវែងកាំនៃស្វ៊ែ (S) ។

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S) ។

គ. រកសមីការបណ្តាប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០៧

I. ក. កំណត់ចំនួនពិត x និង y :

គេមាន $2xi-y=\dfrac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$

$$=\frac{3+3i-2i-2i^2}{(i-2)}=\frac{5+i}{(i-2)}$$

$$=\frac{(5+i)(i+2)}{(i-2)(i+2)}=\frac{5i+10+i^2+2i}{-1-4}$$

$$=\frac{9+7i}{-5}=-\frac{9}{5}-\frac{7}{5}i$$

តាមនិយមន័យចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នា គេបាន ៖

$$\begin{cases}2x=-\dfrac{7}{5}\\ -y=-\dfrac{9}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{7}{10}\\ y=\dfrac{9}{5}\end{cases}$$

ដូចនេះ កំណត់បានចំនួនពិត $\boxed{x=-\dfrac{7}{10}\ ,\ y=\dfrac{9}{5}}$ ។

ខ. សរសេរ $(1+z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$

នោះ $1+z=1+\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$

$$=2\cos^2\frac{\pi}{9}+i2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$$

$$=2\cos\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)$$

នាំឱ្យ $(1+z)^4=\left[2\cos\dfrac{\pi}{9}\left(\cos\dfrac{\pi}{9}+i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)\right]^4$

$$(1+z)^4=16\cos^4\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{(1+z)^4=16\cos^4\dfrac{\pi}{9}\left(\cos\dfrac{4\pi}{9}+i\sin\dfrac{4\pi}{9}\right)}$ ។

II. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល :

គេមាន $(E): g''(x)-5g'(x)+6g(x)=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-5\lambda+6=0$ មានឫស $\lambda=2\ ,\ \lambda=3$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) រាង $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$, A,B ថេរ

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y=Ae^{2x}+Be^{3x}}$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ (E) ដែល

គេមាន $g(x)=Ae^{2x}+Be^{3x}$

នោះ $g'(x)=2Ae^{2x}+3Be^{3x}$

ដោយ $\begin{cases}g(0)=0\\ g'(0)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ae^0+Be^0=0\\ 2Ae^0+3Be^0=1\end{cases}$

$$\begin{cases}A+B=0\\ 2A+3B=1\end{cases}\Bigg|\times(-2)$$

$$+\begin{cases}-2A-2B=0\\ 2A+3B=1\end{cases}$$

$$B=1\quad\Rightarrow\ A=-1$$

ដូចនេះ ចម្លើយមួយគឺ $\boxed{g(x)=-e^{2x}+e^{3x}}$ ។

III. ➤គណនាលីមីត $f(x)$ កាលណា x ខិតជិត 0 :

គេមាន $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ ចំពោះ $x\neq 0$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\times 1=2$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2}$ ។

➤ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$

f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$ និង $f(0)=\ln(m-1)$

គេបាន $\ln(m-1)=2$ ឬ $m-1=e^2$ នោះ $m=e^2+1$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $\boxed{m=e^2+1}$ ។

IV. រកប្រូបាបដែលគេអាចចាប់យកបានឃ្លីស 2 និងឃ្លីខ្មៅ 1

គេមាន ឃ្លីស 3 និងឃ្លីខ្មៅ 5 ហើយគេចាប់យកឃ្លីម្តង 3

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច $n(s)=C(8\ ,\ 3)=\dfrac{8!}{3!\cdot 5!}=56$

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(3,2)\times C(5,1)=15$

គេបាន $P(\text{ស}\,2\ ,\text{ខ}\,1)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{15}{56}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រូបាបគណនាបានគឺ } P(\text{ស}\,2\ ,\text{ខ}\,1)=\dfrac{15}{56}}$ ។

V. ក. កំណត់ចំនួនពិត $a\,,b\,,c$:

គេមាន $g(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$ ចំពោះ $x\neq 2$

គេបាន $g(x)=x-1-\dfrac{6}{x-2}$ (បានពីចែកពហុធា)

ផ្ទឹមនឹង $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ នោះគេទាញបាន

$a=1\,,b=-1\,,\ c=-6$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=1\,,b=-1\,,\ c=-6}$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប (C)

គេមាន $\lim\limits_{x\to2^-}g(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}=\dfrac{4-6-4}{2+0^--2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to2^+}g(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}=\dfrac{4-6-4}{2+0^+-2}=-\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to2}g(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ហើយ $g(x)=x-1-\dfrac{6}{x-2}$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{6}{x-2}\right)=0$

នោះបន្ទាត់ $y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

គ. បង្ហាញថាចំណុច $I(2\,,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C)

បើ $I(a\,,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ g

លុះត្រាតែ $g(2a-x)+g(x)=2b$

ចំពោះ $I(2\,,1)$ គេនឹងបង្ហាញថា $g(4-x)+g(x)=2$

គេមាន $g(x)=x-1-\dfrac{6}{x-2}$

នាំឱ្យ $g(4-x)=(4-x)-1-\dfrac{6}{(4-x)-2}$

$=-x+3-\dfrac{6}{-x+2}$

$=-x+3+\dfrac{6}{x-2}$

គេបាន $g(4-x)+g(x)$

$=\left(-x+3+\dfrac{6}{x-2}\right)+\left(x-1-\dfrac{6}{x-2}\right)=2$

ដោយ $g(4-x)+g(x)=2$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុច } I(2\,,1) \text{ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប } (C)}$ ។

VI. ក. កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត និងប្រវែងកាំនៃស្វ៊ែ (S) :

គេមាន $(S):\ x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$

$(x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2+4z)=0$

$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)+(z^2+4z+4)=9$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=3^2$

ទាញបាន $a=1\,,b=2\,,c=-2$ និងកាំ $r=3$

ដូចនេះ ស្វ៊ែ (S) មានកូអរដោនេផ្ចិតតាង $I(1\,,2\,,-2)$ និងប្រវែងកាំ $r=3$ ឯកតាប្រវែង ។

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S)

រកចម្ងាយពីផ្ចិតស្វ៊ែ ទៅប្លង់ (P)

តាមរូបមន្ត $d(I\,,(P))=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $(P):x+2y+2z+5=0$ នោះ:

$a=1\,,b=2\,,c=2$ និង $d=5$

ហើយ ផ្ចិត $I(1,2,-2)$ នោះ: $x_0=1\,,y_0=2\,,z_0=-2$

នាំឱ្យ $d(I\,,(P))=\dfrac{|1\cdot1+2\cdot2+2(-2)+5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{|6|}{3}=2$

ដោយ $d(I,(P))=2<r=3$ នោះប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S)

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្លង់ } (P) \text{ កាត់ស្វ៊ែ } (S)}$ ។

គ. រកសមីការបណ្ដាប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S)

តាង $(\alpha):ax+by+cz+d=0$ ជាបណ្ដាសមីការប្លង់ត្រូវរក

ដោយ $(\alpha)\parallel(P)$ នោះ (α) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ដូចប្លង់ (P)

គេបាន $(\alpha):x+2y+2z+d=0$

តែ (α) ប៉ះ (S) មានន័យថា $d(I,(\alpha))=r=3$

គេបាន $\dfrac{|x_I+2y_I+2z_I+d|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=3$ ដែល $I(1\,,2\,,-2)$

$\dfrac{|1+2\cdot2+2(-2)+d|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=3$

$|1+d|=9$ នោះ: $1+d=\pm9$ នោះ: $d=\left[\begin{array}{l}-10\\8\end{array}\right.$

ដូចនេះ បណ្ដាប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) មាន

$\boxed{x+2y+2z-10=0\,,\ x+2y+2z+8=0}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១៦ តុលា ២០០៨

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយសមីការ $\frac{x-1}{1991}+\frac{x-5}{1987}+\frac{x+7}{1999}+\frac{x-11}{1981}=4$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $\ln\sqrt{x^2}=\sqrt{2\ln(-x)}$ ។

គ. ដោះស្រាយវិសមីការ $0<\frac{x^2-2x-3}{x-2}<4$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ A , B , C ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$ ។

ខ. គណនា $F(x)=\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. គេមានថង់ពីរ A និង B ។ ក្នុងថង់ A មានប៊ូលពណ៌ស 1 និងពណ៌ខ្មៅ 3 ។ ក្នុងថង់ B មានប៊ូលពណ៌ស 5 និងពណ៌ខ្មៅ 3 ។ គេទាញប៊ូលមួយពីថង់ A និងប៊ូលមួយពីថង់ B ហើយប្តូរគ្នា ។

ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យក្នុងថង់ A មានតែប៊ូលពណ៌ខ្មៅបន្ទាប់ពីប្តូរគ្នា ។

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យពណ៌ប៊ូលនៅក្នុងថង់នីមួយៗនៅដដែលបន្ទាប់ពីប្តូរគ្នា ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y'+4y=0$ ។

ខ. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(F): y''+4y'+4y=-4x$ ។

កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $x\mapsto ax+b$ ជាចម្លើយនៃ (F) ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់វិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យបួនចំណុចគឺ $A(-2,0,1)$, $B(0,10,3)$, $C(2,0,-1)$ និង $D(5,3,-1)$ ។

ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A , B និង C

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច D ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។

គ. សរសេរសមីការស្វ៊ែផ្ចិត D ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (P) ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=3\sin x-2\sin^3 x$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃ f ។

ខ. រកចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ F កំណត់ដោយ $F(x)=a\cos x+b\cos^3 x$ ជាព្រីមីទីវនៃ f ។ **(២ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០៨

I. **ក. ដោះស្រាយសមីការ :**

$$\frac{x-1}{1991}+\frac{x-5}{1987}+\frac{x+7}{1999}+\frac{x-11}{1981}=4$$

$$\frac{x-1}{1991}-1+\frac{x-5}{1987}-1+\frac{x+7}{1999}-1+\frac{x-11}{1981}-1=0$$

$$\frac{x-1992}{1991}+\frac{x-1992}{1987}+\frac{x-1992}{1999}+\frac{x-1992}{1981}=0$$

$$(x-1992)\left(\frac{1}{1991}+\frac{1}{1987}+\frac{1}{1999}+\frac{1}{1981}\right)=0$$

នាំឱ្យ $x-1992=0$ នោះ $x=1992$

ហើយ $\frac{1}{1991}+\frac{1}{1987}+\frac{1}{1999}+\frac{1}{1981}\neq 0$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=1992}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

សមីការ $\ln\sqrt{x^2}=\sqrt{2\ln(-x)}$ មានន័យលុះត្រាតែ

$$\begin{cases}x\neq 0\\ \ln(-x)\geq 0\\ -x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\leq -1\\ x<0\end{cases}\Rightarrow x\leq -1$$

ចំពោះ $x\leq -1$ នោះ $\sqrt{x^2}=-x$

គេបាន $\ln(-x)=\sqrt{2\ln(-x)}$

គេតាង $t=\ln(-x)$

គេបាន $t=\sqrt{2t}$ សមមូល $t^2=2t$ ឬ $t(t-2)=0$

នាំឱ្យ $t=0\ ,\ t=2$

គេបាន $\left[\begin{array}{l}\ln(-x)=0\\ \ln(-x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-x=1\\ -x=e^2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-e^2\end{array}\right.$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=-1\ ,\ x=-e^2}$ ។

គ. ដោះស្រាយវិសមីការ $0<\frac{x^2-2x-3}{x-2}<4$

អាចសរសេរ $\begin{cases}\frac{x^2-2x-3}{x-2}>0\\ \frac{x^2-2x-3}{x-2}<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2-2x-3}{x-2}>0\ (1)\\ \frac{x^2-6x+5}{x-2}<0\ (2)\end{cases}$

កន្សោម x^2-2x-3 មានឫស $x=-1\ ,\ x=3$

កន្សោម x^2-6x+5 មានឫស $x=1\ ,\ x=5$

កន្សោម $x-2$ មានឫស $x=2$

ចម្លើយនៃប្រព័ន្ធវិសមីការ ជាតម្លៃនៃ x បានពីប្រសព្វរវាងចម្លើយ (1) និងចម្លើយ (2) ។

តារាងសញ្ញា (1)

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-2x-3}{x-2}>0$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

ចម្លើយ $(1): x\in(-1\ ,\ 2)\cup(3\ ,\ +\infty)$

តារាងសញ្ញា (2)

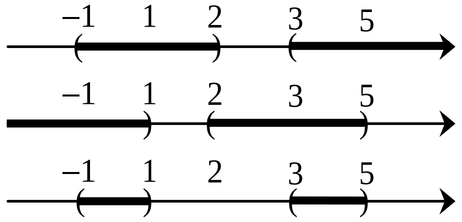
x	$-\infty$		1		2		5		$+\infty$
x^2-6x+5		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-6x+5}{x-2}<0$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

ចម្លើយ $(2): x\in(-\infty\ ,\ 1)\cup(2\ ,\ 5)$

ចម្លើយ (1) :

ចម្លើយ (2) :

ចម្លើយ



ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $\boxed{x\in(-1\ ,\ 1)\cup(3\ ,\ 5)}$ ។

II. **ក. កំណត់តម្លៃ** $A\ ,\ B\ ,\ C$:

គេមាន $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$

$$=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

$$=\frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x^2+2x+1)}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x^3+2x^2+x}$$

ផ្ទឹមនឹង $f(x)=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases}A+B=5\\ 2A+B+C=20\\ A=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-1\\ C=9\\ A=6\end{cases}$$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $\boxed{A=6\,,\,B=-1\,,\,C=9}$ ។

ខ. គណនា $F(x)=\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$

ចំពោះ $A=6\,,\,B=-1\,,\,C=9$ រកឃើញខាងលើ

គេបាន $f(x)=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}=\frac{6}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}$

នាំឱ្យ $F(x)=\int\left(\frac{6}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}\right)dx$

$=6\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{9}{x+1}+c$, c ថេរ

III. ក. **រកប្រូបាបដែលថង់ A មានតែប៊ូលពណ៌ខ្មៅបន្ទាប់ពីប្ដូរគ្នា**

គេមាន ថង់ A មានប៊ូលស 1 និងខ្មៅ 3

ថង់ B មានប៊ូលស 5 និងខ្មៅ 3

ដើម្បីឱ្យ ថង់ A មានតែប៊ូលពណ៌ខ្មៅបន្ទាប់ពីប្ដូរគ្នា លុះត្រាតែ ចាប់បានប៊ូលពណ៌សពីថង់ A និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅពីថង់ B

គេបាន $P($ A មានតែប៊ូលខ្មៅ $)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{32}$

ដូចនេះ $\boxed{P(\ A \text{ មានតែប៊ូលខ្មៅ})=\frac{3}{32}}$ ។

ខ. **រកប្រូបាបពណ៌ប៊ូលក្នុងថង់នីមួយៗនៅដដែលបន្ទាប់ពីប្ដូរគ្នា**

ដើម្បីឱ្យពណ៌ប៊ូលនៅដដែលបន្ទាប់ពីប្ដូរគ្នារួច គឺមានន័យថា ចាប់បានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា អាចជាសដូចគ្នា ឬខ្មៅដូចគ្នា

គេបាន $P($ សស ឬ ខខ $)=\left(\frac{1}{4}\times\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{16}$

ដូចនេះ $\boxed{P(\text{ប៊ូលនីមួយៗនៅដដែល})=\frac{7}{16}}$ ។

IV. ក. **ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល** :

គេមាន $(E): y''+4y'+4y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2+4\lambda+4=0$

ឬ $(\lambda+2)^2=0$

មានឫសឌុប $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0=-2$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) រាង $y=Axe^{\lambda_0 x}+Be^{\lambda_0 x}$, $A\,,\,B$ ថេរ

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y=Axe^{-2x}+Be^{-2x}}$ ។

ខ. **កំណត់ចំនួនពិត a និង b**

តាង $f(x)=ax+b$ ជាចម្លើយនៃ (F)

នាំឱ្យ $f'(x)=a$ និង $f''(x)=0$

ដោយ f ជាចម្លើយនៃ $(F): y''+4y'+4y=-4x$

គេបាន $f''+4f'+4f=-4x$

$0+4a+4(ax+b)=-4x$

$4ax+(4a+4b)=-4x+0$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}4a=-4\\ 4a+4b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=-1\,,\,b=1}$ ។

V. ក. **សរសេរសមីការប្លង់ (P)**

ប្លង់ត្រូវរករាង $(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ ប្លង់ (P) កាត់ $A(-2\,,\,0\,,\,1)$

នោះ $x_0=-2\,,\,y_0=0\,,\,z_0=1$

ហើយ ប្លង់ (P) កាត់បីចំណុច $A\,,\,B\,,\,C$ នោះ (P) មាន វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(2\,,10\,,\,2)$, $\overrightarrow{AC}=(4\,,\,0\,,\,-2)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 10 & 2\\ 4 & 0 & -2\end{vmatrix}=-20\vec{i}+12\vec{j}-40\vec{k}$

នោះ $a=-20\,,\,b=12\,,\,c=-40$

គេបាន $(P):-20(x+2)+12(y-0)-40(z-1)=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P): 5x-3y+10z=0}$ ។

ខ. **សរសេរសមីការបន្ទាត់កាត់តាម D ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)**

សមីការបន្ទាត់ត្រូវរកតាង $(\ell):\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\ ,\ t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+ct\end{cases}$

ដោយ (ℓ) កាត់តាម $D(5\,,\,3\,,\,-1)$

នោះ $x_0=5\,,\,y_0=3\,,\,z_0=-1$

ហើយ (ℓ) កែងនឹងប្លង់ (P) នោះ (ℓ) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គឺ $\vec{u}=(5\,,\,-3\,,\,10)$

នោះ $a=5\,,\,b=-3\,,\,c=10$

ដូចនេះ បន្ទាត់ត្រូវរករាង $\boxed{(\ell):\begin{cases}x=5+5t\\ y=3-3t\quad ,\ t\in\mathbb{R}\\ z=-1+10t\end{cases}}$ ។

គ. សរសេរសមីការស្វ៊ែផ្ចិត D ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (P)

ដោយស្វ៊ែ (S) ប៉ះប្លង់ (P) នោះកាំស្វ៊ែជាចម្ងាយពីផ្ចិតទៅប្លង់

(P) នាំឱ្យ $R=d\left(D,(P)\right)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $D(5\,,3\,,-1)$ និង $(P):\ 5x-3y+10z=0$

$$R=\frac{|5\cdot5-3\cdot3+10(-1)|}{\sqrt{5^2+(-3)^2+10^2}}=\frac{|6|}{\sqrt{134}}\Rightarrow R^2=\frac{36}{134}=\frac{18}{67}$$

សមីការស្វ៊ែរាង $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

មានផ្ចិត $D(5\,,3\,,-1)$ នោះ $a=5\,,b=3\,,c=-1$

គេបាន $(S):(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\dfrac{18}{67}$

ដូចនេះ $\boxed{(S):(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\dfrac{18}{67}}$ ។

VI. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃ f

គេមាន $f(x)=3\sin x-2\sin^3 x$

• ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

• ខួបអនុគមន៍ $P=2\pi$ ព្រោះ $\forall x\in D$ គេបាន ៖

$$f(x+2\pi)=3\sin(x+2\pi)-2\sin^3(x+2\pi)$$
$$=3\sin x-2\sin^3 x=f(x)$$

• ភាពគូ-សេស : f ជាអនុគមន៍ សេស ព្រោះ ៖

$$f(-x)=3\sin(-x)-2\sin^3(-x)$$
$$=-3\sin x+2\sin^3 x$$
$$=-\left(3\sin x-2\sin^3 x\right)=-f(x)$$

នាំឱ្យ ក្រាបតាងអនុគមន៍ f មានគល់ O ជាផ្ចិតឆ្លុះ

ហេតុនេះ គេសិក្សាតែក្នុងចន្លោះ $[0\,,\pi]$

• ទិសដៅអថេរភាព

ដេរីវេ $f'(x)=3\cos x-6\cos x\sin^2 x$

$$=3\cos x\left(1-2\sin^2 x\right)$$
$$=3\cos x\left(\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin^2 x\right)$$
$$=3\cos x(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$$

គេឱ្យ $f'(x)=0$ ដើម្បីរកឫស

សមមូល $\left|\begin{array}{l}3\cos x=0\\ \cos x-\sin x=0\\ \cos x+\sin x=0\end{array}\right.\Rightarrow\left|\begin{array}{l}x=\pi/2\\ x=\pi/4\\ x=3\pi/4\end{array}\right.$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos x$		+		+	0	−		−	
$\cos x-\sin x$		+	0	−		−		−	
$\cos x+\sin x$		+		+		+	0	−	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

-ត្រង់ $x=\pi/4$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាស្មើ $f(\pi/4)=\sqrt{2}$

-ត្រង់ $x=\pi/2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាស្មើ $f(\pi/2)=1$

-ត្រង់ $x=3\pi/4$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

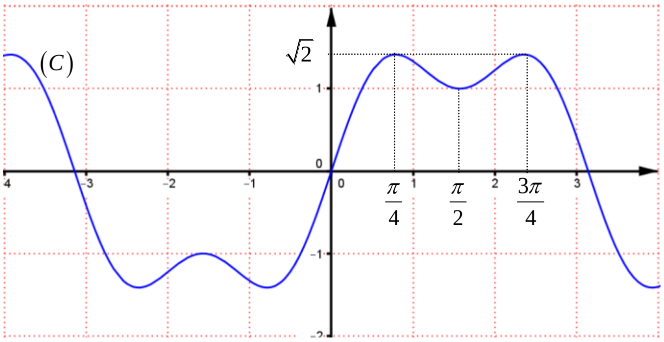
បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាស្មើ $f(3\pi/4)=\sqrt{2}$

• តារាងអថេរភាព

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	0

• សង់ក្រាប

ដំបូងសង់តែក្នុងចន្លោះ $[0\,,\pi]$ រួចសង់ក្រាបឆ្លុះធៀបគល់ O



ខ. រកចំនួនពិត a និង b

បើ F ជាព្រីមីទីវនៃ f នោះគេបាន

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\left(3\sin x-2\sin^3 x\right)dx$$
$$=\int\sin x\left(3-2\sin^2 x\right)dx=\int\sin x\left(1+2\cos^2 x\right)dx$$
$$=\int\sin x dx+2\int\sin x\cos^2 x dx$$
$$=-\cos x-2\int(\cos x)'\cos^2 x dx=-\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x$$

ផ្ទឹមនឹង $F(x)=a\cos x+b\cos^3 x$ នោះ $a=-1\,,b=-\dfrac{2}{3}$

ដូចនេះ រកបានចំនួនពិត $\boxed{a=-1\ ,\ b=-2/3}$

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ១៥ តុលា ២០០៩

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $z^2-(5-i)z+8-i=0$ ។

ខ. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=29x^2+6x+2010$ ។ បើ $a>0$, $b>0$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\dfrac{a+b}{1+a+b}\right)<f\left(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}\right)$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ត្រីកោណកែងមួយមានប្រវែងអ៊ីប៉ូតេនុស 5dm ។ កំណត់ប្រវែងជ្រុងនៃមុំកែងរបស់ត្រីកោណកែង ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡារបស់វាមានតម្លៃអតិបរមា ។ **(១ពិន្ទុ)**

III. ក. ចូរកំណត់ចំនួនថេរ a និង b ដើម្បីឱ្យចំពោះគ្រប់ x គេបាន $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x(x+1)}+\dfrac{b}{(x+1)(x+2)}$ ។

ខ. គណនាផលបូក $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+.......+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

IV. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលក្រហម 3 ប៊ូលខ្មៅ 3 និងប៊ូលស 3 ។ គេចាប់យកប៊ូល 3 ពីក្នុងថង់ ដោយយកម្តងមួយៗ ហើយមិនដាក់វិញ ។

ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេចាប់យកបានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា ។

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេចាប់យកបានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(1,4,3)$, $B(2,11,4)$, $C(-3,-5,4)$ ។

ក. បង្ហាញថា បីចំណុច A , B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A , B , C ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(ax+b)$ មានខ្សែកោង (C) ។

ក. កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x=-1$ និងកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y=\ln 2$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f ចំពោះតម្លៃ a និង b ដែលរកឃើញ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ $x=-\dfrac{3}{2}$ និងបន្ទាត់ $x=0$ ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០៩

I. **ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច :**

គេមាន $z^2-(5-i)z+8-i=0$

$$\Delta=\left[-(5-i)\right]^2-4\cdot1\cdot(8-i)$$
$$=25-10i+i^2-32+4i$$
$$=25-10i+i^2-32+4i$$
$$=-8-6i=(3i)^2-6i+1$$
$$=(3i-1)^2$$

នាំឱ្យ $z=\dfrac{(5-i)\pm(3i-1)}{2}=\left[\begin{array}{l}2+i\\3-2i\end{array}\right.$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{z=2+i\ ,\ z=3-2i}$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\dfrac{a+b}{1+a+b}\right)<f\left(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}\right)$

គេមាន $f(x)=29x^2+6x+2010$

នាំឱ្យ $f'(x)=58x+6$

ចំពោះ $x>0$ នោះ $f'(x)=58x+6>0$

មានន័យថា f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(0\ ,+\infty)$

គេបាន បើ $0<x_1<x_2$ នោះ $f(x_1)<f(x_2)$

ម្យ៉ាងទៀត ចំពោះ $a>0\ ,b>0$ គេបាន ៖

$$0<\frac{a}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}\quad(1)$$
$$0<\frac{b}{1+a+b}<\frac{b}{1+b}\quad(2)$$

បូកអង្គ និងអង្គនៃ (1) និង (2) គេបាន ៖

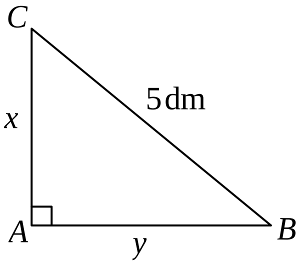
$$0<\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$$
$$0<\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$$

នាំឱ្យ $f\left(\dfrac{a+b}{1+a+b}\right)<f\left(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{f\left(\dfrac{a+b}{1+a+b}\right)<f\left(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}\right)}$ ។

II. **កំណត់ប្រវែងជ្រុងនៃមុំកែងរបស់ត្រីកោណកែង :**

តាង $x\ ,\ y>0$ ជាជ្រុងជាប់មុំកែង គិតជា dm ដូចរូប ៖



តាមពីតាគ័រ $y=\sqrt{25-x^2}$ ដែល $0<x<5$

ផ្ទៃត្រីកោណ $S=\dfrac{1}{2}xy$ ឬ $S(x)=\dfrac{1}{2}x\sqrt{25-x^2}$

នាំឱ្យ $S'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{25-x^2}+\dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{25-x^2}}$$
$$=\frac{25-x^2-x^2}{2\sqrt{25-x^2}}=\frac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}$$

ឱ្យ $f'(x)=0$ សមមូល $\dfrac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}=0$

នាំឱ្យ $25-2x^2=0$ នោះ $x=\pm\dfrac{5}{\sqrt2}=\pm\dfrac{5\sqrt2}{2}$

ហើយ $S\left(\dfrac{5\sqrt2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5\sqrt2}{2}\right)\sqrt{25-\left(\dfrac{5\sqrt2}{2}\right)^2}=\dfrac{25}{4}$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{5\sqrt2}{2}$	0	$\frac{5\sqrt2}{2}$	$+\infty$
$S'(x)$	$-$	0	$+$	$+\ \ 0$	$-$

• ត្រង់ $x=\dfrac{5\sqrt2}{2}$, $S'(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា S មានតម្លៃអតិបរមាមួយស្មើ $25/4$ ។

គេបាន $y=\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-\left(\dfrac{5\sqrt2}{2}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt2}{2}$

ដូចនេះ ជ្រុងជាប់មុំកែង $\boxed{x=y=\dfrac{5\sqrt2}{2}\text{dm}}$ ។

III. ក. កំណត់ចំនួនថេរ a និង b : (លំហាត់ដូចគ្រូបឋមឆ្នាំ 2004)

គេមាន $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x(x+1)}+\dfrac{b}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{a(x+2)+bx}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{(a+b)x+2a}{x(x+1)(x+2)}$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}a+b=0\\2a=1\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}\ ,\ b=-\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=\dfrac{1}{2}\ ,\ b=-\dfrac{1}{2}}$ ។

ខ. គណនាផលបូក

គេតាង $S=\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+.......+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

គេមាន $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{1/2}{x(x+1)}+\dfrac{-1/2}{(x+1)(x+2)}$

$\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\right]$

យក $x=1\,,2\,,3\,,...\,,n$ គេបាន ៖

$$+\begin{cases}\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{2\cdot3}\right]\\[2mm]\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2\cdot3}-\dfrac{1}{3\cdot4}\right]\\[2mm]\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3\cdot4}-\dfrac{1}{4\cdot5}\right]\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\end{cases}$$

$$S=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{S=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)}$ ។

IV. ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេចាប់យកបានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា :

គេមាន ប៊ូលក្រហម 3 , ខ្មៅ 3 ,ស 3

គេចាប់ ប៊ូល 3 ពីក្នុងថង់ ម្តងមួយៗ ហើយមិនដាក់វិញ

ចាប់បានឃ្លី 3 ពណ៌ដូចគ្នា អាចក្រហម 3ឬខ្មៅ 3 ឬស 3

គេបាន $P($ពណ៌ដូចគ្នា$)=P($ក្រ.3$)+P($ខ្ម3$)+P($ស3$)$

$=\left(\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{1}{28}$

ដូចនេះ $\boxed{P(\text{ពណ៌ដូចគ្នា})=\dfrac{1}{28}}$ ។

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេចាប់យកបានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌

ចាប់បានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌ អាចជា ៖

កខស ឬ កសខ ឬ ខកស ឬ ខសក ឬ សកខ ឬ សខក

(ដែល ក=ពណ៌ក្រហម , ខ=ពណ៌ខ្មៅ , ស=ពណ៌ស)

ដោយប្រូបាបនៃករណីនីមួយៗមានសតម្លៃស្មើៗគ្នា $\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{3}{7}$

គេបាន $P($ប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌$)=6\left(\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{3}{7}\right)=\dfrac{9}{28}$

ដូចនេះ $\boxed{P(\text{ប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌})=\dfrac{9}{28}}$ ។

V. ក. បង្ហាញថា បីចំណុច A , B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ

គេមាន $A(1\,,4\,,3)\,,B(2\,,11\,,4)\,,C(-3\,,-5\,,4)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(1\,,7\,,1)\,,\overrightarrow{AC}=(-4\,,-9\,,1)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&7&1\\-4&-9&1\end{vmatrix}=16\vec{i}-5\vec{j}+19\vec{k}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=16\vec{i}-5\vec{j}+19\vec{k}\neq\vec{0}$

នាំឱ្យ $A\,,B\,,C$ មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ដូចនេះ $\boxed{\text{បីចំណុច } A\,,B \text{ និង } C \text{ មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ}}$ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច $A\,,B\,,C$

ប្លង់ (P) រាង $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ (P) កាត់តាមចំណុច $A(1\,,4\,,3)$

នាំឱ្យ $x_0=1\,,\,y_0=4\,,\,z_0=3$

ហើយ (P) កាត់បីចំណុច $A\,,B\,,C$ នោះ (P) មានវ៉ិចទ័រ

ណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=16\vec{i}-5\vec{j}+19\vec{k}$

នាំឱ្យ $a=16\,,b=-5\,,c=19$

គេបាន $(P)\ :\ 16(x-1)-5(y-4)+19(z-3)=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P):16x-5y+19z-53=0}$ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

ដោយ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{16^2+(-5)^2+19^2}=\sqrt{642}$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{642}}{2}\text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}}$ ។

VI. ក. កំណត់តម្លៃ a និង b :

គេមាន $f(x)=\ln(ax+b)$ មានខ្សែកោង (C)

ដោយ ខ្សែកោង (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x=-1$

និងកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y=\ln 2$

គេបាន $\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(0)=\ln 2 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} \ln(-a+b)=0 \\ \ln b=\ln 2 \end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} -a+b=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=1\,,\,b=2}$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f

ចំពោះ $a=1\,,\,b=2$ នោះ $f(x)=\ln(x+2)$

• ដែនកំណត់ $x+2>0$ នោះ $x>-2$

នាំឱ្យ $D=(-2\,,+\infty)$

• លីមីត $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\ln(x+2)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+2)=+\infty$

• អាស៊ីមតូត ដោយ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមាន

សមីការ $x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

• ទិសដៅអថេរភាព : ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{1}{x+2}$

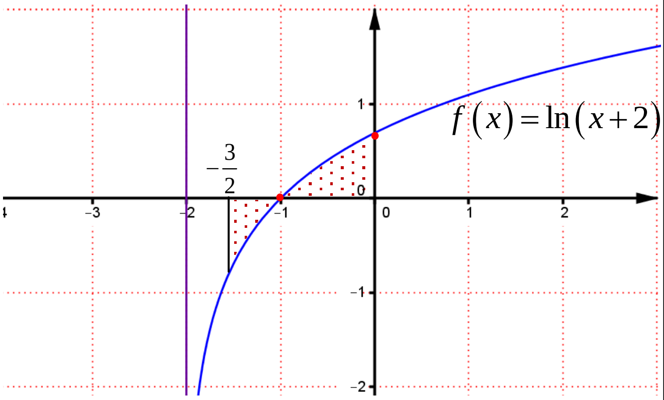
ចំពោះ $x>-2$ នោះ $f'(x)=\dfrac{1}{x+2}>0$

នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $D=(-2\,,+\infty)$

តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	-2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

• សង់ក្រាប



➤ គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃប្លង់

តាមក្រាប គេបានផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយ

$$S=-\int_{-3/2}^{-1} f(x)\,dx+\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$$

$$=-\int_{-3/2}^{-1}\ln(x+2)\,dx+\int_{-1}^{0}\ln(x+2)\,dx$$

គណនា $\int\ln(x+2)\,dx$ តាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

គេតាង $u=\ln(x+2)\Rightarrow du=\dfrac{1}{x+2}dx$

$dv=dx \Rightarrow v=x$

តាមរូបមន្ត $\int u\,dv=uv-\int v\,du$

គេបាន $\int\ln(x+2)\,dx$

$$=x\ln(x+2)-\int\frac{x}{x+2}dx$$

$$=x\ln(x+2)-\int\frac{x+2-2}{x+2}dx$$

$$=x\ln(x+2)-\int\left(1-2\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=x\ln(x+2)-x+2\ln(x+2)+c$$

$$=(x+2)\ln(x+2)-x+c$$

នាំឱ្យ $\int_{-3/2}^{-1}\ln(x+2)\,dx$

$$=\left[(x+2)\ln(x+2)-x\right]_{-3/2}^{-1}$$

$$=(0+1)-\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$$

ហើយ $\int_{-1}^{0}\ln(x+2)\,dx$

$$=\left[(x+2)\ln(x+2)-x\right]_{-1}^{0}$$

$$=(2\ln 2-0)-(0+1)=2\ln 2-1$$

$$S=-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right)+(2\ln 2-1)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+2\ln 2-1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2+2\ln 2-1=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ } S=\dfrac{3\ln 2-1}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១៥ តុលា ២០១០

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. គេឱ្យចំនួនពិត α មួយដែល $-\pi<\alpha<\pi$ ។

ក. បង្ហាញថា $\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)=-4\cos^4\frac{\alpha}{2}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $Z^2-2Z\sin\alpha+2(1+\cos\alpha)=0$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

II. ចតុកោណកែងមួយមានផ្ទៃក្រឡា $2500\,\mathrm{m}^2$ ។ រកប្រវែងជ្រុងនៃចតុកោណកែង ដើម្បីឱ្យវាមានបរិមាត្រតូចបំផុត ។ **(១ពិន្ទុ)**

III. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-y=0$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) បើដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយកាត់អ័ក្ស $(y'y)$ ត្រង់ចំណុច $y=4$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុចនេះ ស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $(D): y=2x-4$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

IV. គេទាញយកអក្សរ បួន ពីតួអក្សរនៃពាក្យ STATISTIQUE ។ ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលមានពាក្យ SITE តាមលំដាប់នៃតួអក្សរ បើគេទាញយកម្តងមួយៗ ក្នុងករណីទាំងពីរខាងក្រោម ៖

ក. គេមិនដាក់ទៅវិញទេនូវតួអក្សរដែលទាញយកមកហើយ ។

ខ. គេដាក់ទៅវិញនូវតួអក្សរដែលទាញយកមកហើយ មុននឹងទាញយកតួអក្សរមួយទៀត ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ នៃលំហគេមានចំណុច $A(6,4,-2)$, $B(6,2,0)$, $C(4,2,-2)$ ។

ក. បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ខ. គេឱ្យចំណុច $S(3,y,z)$ ។ គណនាតម្លៃ y និង z ដើម្បីឱ្យ $SABC$ ជាពីរ៉ាមីតនិយ័តមានកំពូល S ។ **(២ពិន្ទុ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ f មានអថេរ x កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា អនុគមន៍ f កំណត់លើសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ខុសពីសូន្យ ។

ខ. បង្ហាញថា អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស ។

គ. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $]0,+\infty[$ រួចទាញរកទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $]-\infty,0[$ ។

ឃ. ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=\dfrac{2}{3}$ ។ **(៣ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០១០

I. **ក.** **បង្ហាញថា** $\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)=-4\cos^4\frac{\alpha}{2}$:

របៀបទី១ $\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)$

$$=\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-2\cdot2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$=4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-1\right)$$

$$=-4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=-4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)=-4\cos^4\frac{\alpha}{2}}$ ។

របៀបទី២ $\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)$

$$=(1-\cos^2\alpha)-2-2\cos\alpha$$

$$=-\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1$$

$$=-(\cos x+1)^2$$

$$=-\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^2=-4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)=-4\cos^4\frac{\alpha}{2}}$ ។

ខ. **ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច**

គេមាន $Z^2-2Z\sin\alpha+2(1+\cos\alpha)=0$

$$\Delta'=(-\sin\alpha)^2-2(1+\cos\alpha)$$

$$=\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)=-4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

នាំឱ្យ $Z=\dfrac{\sin\alpha\pm\sqrt{-4\cos^4\frac{\alpha}{2}}}{1}=\sin\alpha\pm2i\cos^2\frac{\alpha}{2}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{Z=\sin\alpha\pm2i\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ ។

II. **រកប្រវែងជ្រុងនៃចតុកោណកែង** :

គេតាង x ជាបណ្តោយ , $x>0$

y ជាទទឹង , $y>0$

y [$xy=2500$] x

គេបាន $xy=2500$ នោះ $y=\dfrac{2500}{x}$

បរិមាត្រ $P=2(x+y)$ នោះ $P(x)=2\left(x+\dfrac{2500}{x}\right)$

នាំឱ្យ $P'(x)=2\left(1-\dfrac{2500}{x^2}\right)=2\left(\dfrac{x^2-2500}{x^2}\right)$

ឱ្យ $P'(x)=0\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{x^2-2500}{x^2}\right)=0$

នាំឱ្យ $x^2-2500=0$ នោះ $x=\pm50$

តារាងសញ្ញា $P'(x)$

x	$-\infty$	-50	0	50	$+\infty$
$P'(x)$	+	0	− ‖ −	0	+

•ត្រង់ $x=50$, $P'(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា P មានតម្លៃតូចបំផុតមួយ ។

គេបាន $y=\dfrac{2500}{x}=\dfrac{2500}{50}=50\text{ m}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រវែងបណ្តោយ}=\text{ប្រវែងទទឹង}=50\text{m}}$ ។

III. **ក.** **ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល** :

គេមាន $(E): y''-y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-1=0$ នោះ $\lambda=\pm1$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) រាង $y=Ae^{\lambda_1x}+Be^{\lambda_2x}$, A , B ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{y=Ae^{-x}+Be^{x}}$ ។

ខ. **កំណត់ចម្លើយមួយនៃសមីការ** (E)

គេមាន $y=Ae^{-x}+Be^{x}$ នាំឱ្យ $y'=-Ae^{-x}+Be^{x}$

ដោយ ក្រាបនៃចម្លើយកាត់អ័ក្ស $(y'y)$ ត្រង់ចំណុច $y=4$

នោះ $y(0)=4$

ហើយ បន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ ចំណុចនេះ គឺ $(0\,,4)$ ស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $(D): y=2x-4$ នោះ $y'(0)=2$

គេបាន $\begin{cases}Ae^{-0}+Be^{0}=4\\-Ae^{-0}+Be^{0}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=4\\-A+B=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=3\\A=1\end{cases}$

ដូចនេះ ចម្លើយមួយនៃ (E) កំណត់បានតាមលក្ខខណ្ឌគឺ

$\boxed{y=e^{-x}+3e^{x}}$ ។

IV. គណនាប្រូបាបចាប់បាន SITE តាមលំដាប់ នៃតួអក្សរ :

ក. គេមិនដាក់ទៅវិញទេនូវតួអក្សរដែលទាញយកមកហើយ

គេមាន តួអក្សរនៃពាក្យ STATISTIQUE មាន 11 អក្សរ

គេបាន $P(\text{SITE})=\frac{2}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{660}$

ដូចនេះ ករណីចាប់ហើយមិនដាក់វិញ $\boxed{P(\text{SITE})=\frac{1}{660}}$ ។

ខ. គេដាក់ទៅវិញមុនយកអក្សរមួយទៀត

ករណីចាប់ហើយដាក់វិញ នោះចំនួនករណីអាចគឺនៅដដែល មិនប៉ះពាល់ដល់ការចាប់លើកក្រោយៗទៀត

គេបាន $P(\text{SITE})=\frac{2}{11}\times\frac{2}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{1}{11}=\frac{12}{14641}$

ដូចនេះ ករណីចាប់ហើយដាក់វិញ $\boxed{P(\text{SITE})=\frac{12}{14641}}$ ។

V. **ក.** បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស :

គេមាន $A(6,4,-2)$, $B(6,2,0)$, $C(4,2,-2)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=(0,-2,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,-2,0)$ និង

$\overrightarrow{BC}=(-2,0,-2)$

គេបាន $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{0^2+(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+0^2}=2\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-2)^2+0^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

ដោយ ΔABC មាន $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\sqrt{2}$

ដូចនេះ $\boxed{ABC \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}}$ ។

ខ. គណនាតម្លៃ y និង z

គេមាន $S(3,y,z)$ នោះ $\overrightarrow{SA}=(-3,y-4,z+2)$

$\overrightarrow{SB}=(-3,y-2,z)$, $\overrightarrow{SC}=(-1,y-2,z+2)$

នាំឱ្យ $SA=\left|\overrightarrow{SA}\right|=\sqrt{(-3)^2+(y-4)^2+(z+2)^2}$

$SB=\left|\overrightarrow{SB}\right|=\sqrt{(-3)^2+(y-2)^2+z^2}$

$SC=\left|\overrightarrow{SC}\right|=\sqrt{(-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2}$

ដោយ $SABC$ ជាពីរ៉ាមីតនិយ័តនោះ $SB=SC=SA$

$$\sqrt{(-3)^2+(y-2)^2+z^2}=\sqrt{(-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2}$$

$$9+(y-2)^2+z^2=1+(y-2)^2+(z+2)^2$$

$$8+z^2=z^2+4z+4$$

$$z=1$$

ចំពោះ $SA=SB$ និង $z=1$ គេបាន ៖

$$\sqrt{(-3)^2+(y-4)^2+3^2}=\sqrt{(-3)^2+(y-2)^2+1^2}$$

$$9+(y-4)^2+9=9+(y-2)^2+1$$

$$8+(y-4)^2=(y-2)^2$$

$$8+y^2-8y+16=y^2-4y+4$$

$$-4y+20=0$$

$$y=5$$

ដូចនេះ គណនាបានតម្លៃ $\boxed{y=5\ ,\ z=1}$ ។

VI. **ក.** ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ខុសពីសូន្យ :

គេមាន $f(x)=\frac{5^x}{5^{2x}-1}$ មានន័យ លុះត្រាតែ $5^{2x}-1\neq 0$

នាំឱ្យ $5^{2x}\neq 1$ ឬ $5^{2x}\neq 5^0$ នោះ $x\neq 0$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ កំណត់លើ } \mathbb{R}-\{0\}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស

គេមាន $f(x)=\frac{5^x}{5^{2x}-1}$

$$f(-x)=\frac{5^{-x}}{5^{-2x}-1}=\frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1}{5^{2x}}-1}=\frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1-5^{2x}}{5^{2x}}}$$

$$=\frac{1}{5^x}\times\frac{5^{2x}}{1-5^{2x}}=\frac{5^x}{1-5^{2x}}=-\frac{5^x}{5^{2x}-1}=-f(x)$$

ដោយ $f(-x)=-f(x)$ នោះ f ជាអនុគមន៍សេស

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍សេស}}$ ។

គ. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $]0,+\infty[$

គេមាន $f(x)=\frac{5^x}{5^{2x}-1}$ សិក្សាលើចន្លោះ $]0,+\infty[$

• លីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{5^x}{5^{2x}-1}=\frac{5^0}{0^+}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x}{5^{2x}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x}{5^{2x}}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x}{5^{2x}-1}=\frac{0}{-1}=0$$

• អាស៊ីមតូត : ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមាន សមីការ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

• ទិសដៅអថេរភាព :

ដេរីវេ តាមរូបមន្ត $y=a^{u(x)} \Rightarrow y'=u'(x)a^{u(x)}\ln a$

ដោយ $f(x)=\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}$ នោះគេបាន ៖

$$f'(x)=\frac{(5^x)'(5^{2x}-1)-(5^{2x}-1)'(5^x)}{(5^{2x}-1)^2}$$

$$=\frac{5^x\ln 5\cdot(5^{2x}-1)-2\cdot 5^{2x}\ln 5\cdot(5^x)}{(5^{2x}-1)^2}$$

$$=\frac{5^x\ln 5\cdot\left[5^{2x}-1-2\cdot 5^{2x}\right]}{(5^{2x}-1)^2}$$

$$=-\frac{5^x\ln 5\cdot(5^{2x}+1)}{(5^{2x}-1)^2}<0\ ,\ \forall x\in D$$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$, $f'(x)<0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $]0\,,+\infty[$ និងចន្លោះ $]-\infty\,,0[$

• តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$

ដោយ f ជាអនុគមន៍សេស មានគល់ O ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប គេទាញបាន ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $]-\infty\,,0[$ ដូចខាងក្រោម :

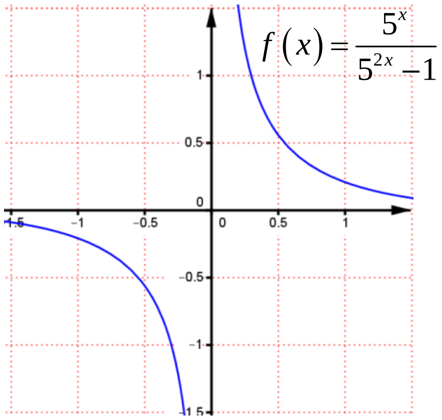
-បើ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ នោះ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

-បើ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ នោះ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$

• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 0

• សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f



ឃ. ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=\dfrac{2}{3}$

គេបាន $\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}=\dfrac{2}{3}$ (សមីការមានន័យ $x\neq 0$)

$3\cdot 5^x=2\cdot 5^{2x}-2$

$-2\cdot 5^{2x}+3\cdot 5^x+2=0$

គេតាង $t=5^x$ ដែល $t>0$

គេបាន $-2t^2+3t+2=0$

$\Delta=9+16=25=5^2$

$t=\dfrac{-3\pm 5}{2(-2)}=\left[\begin{array}{l}2\\-1/2\end{array}\right.$

ចំពោះ $t=-\dfrac{1}{2}$ មិនយក ព្រោះ $t>0$

ចំពោះ $t=2$ សមមូល $5^x=2$ នាំឱ្យ $x=\log_5 2$

ដូចនេះ **សមីការមានឫស $x=\log_5 2$** ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១៥ តុលា ២០១១

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ដែល z , $\frac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូឌុលស្មើគ្នា ។ (**១ពិន្ទុកន្លះ**)

II. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. បង្ហាញថា អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស និងជាអនុគមន៍កើន ។ (**១ពិន្ទុកន្លះ**)

III. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $I=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)(2+x)^n\,dx$ ។

ខ. $J=\int_{6}^{8}\frac{x}{x^2-6x+8}dx$ ។ (**១ពិន្ទុកន្លះ**)

IV. គេមានថង់បួន A , B , C និង D ។ ក្នុងថង់ A មានប៊ូលស 30 ។ ក្នុងថង់ B មានប៊ូលខ្មៅ 40 ។ ក្នុងថង់ C មានប៊ូលស 10 និងប៊ូលពណ៌ក្រហម 25 ។ ក្នុងថង់ D មានប៊ូលស 5 ប៊ូលពណ៌ខៀវ 3 និងប៊ូលពណ៌ក្រហម 2 ។ គេដាក់ថង់ទាំងបួននៅក្នុងថង់ធំមួយ ។ គេចាប់យកដោយចៃដន្យនូវថង់មួយចេញពីថង់ធំ ហើយលូកយកប៊ូលមួយចេញពីថង់នោះ ។ គណនាប្រូបាប ដើម្បីឱ្យប៊ូលដែលគេលូកយកចេញមានពណ៌ស ។ (**១ពិន្ទុកន្លះ**)

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យបន្ទាត់ ℓ មួយដែលកំណត់ដោយ $x=t$, $y=-3+3t$, $z=-2+2t$ និងប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមបន្ទាត់ ℓ និងកាត់តាមចំណុច $A(1,2,1)$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងអ័ក្ស $z'oz$ ។ (**១ពិន្ទុកន្លះ**)

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-2}$ មានខ្សែកោង (C) ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ f ។

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង (C) ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 2 ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្ស $x'ox$ និងបន្ទាត់ $x=3$ និង $x=4$ ។ (**២ពិន្ទុកន្លះ**)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសមធ្យម ឆ្នាំ ២០១១

I. **ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច :**

គេមាន $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$

$$\Delta=\left[-(5-i)\right]^2-4(2+i)(2-2i)$$
$$=25-10i+i^2-16+16i-8i+8i^2$$
$$=-2i=1-2i+i^2=(1-i)^2$$

នាំឱ្យ $x=\dfrac{(5-i)\pm\sqrt{(1-i)^2}}{2(2+i)}=\dfrac{5-i\pm(1-i)}{2(2+i)}$

$$=\left[\begin{array}{l}\dfrac{3-i}{2+i}=\dfrac{(3-i)(2-i)}{2^2-i^2}=\dfrac{6-3i-2i+i^2}{5}\\ \dfrac{2}{2+i}=\dfrac{2(2-i)}{2^2-i^2}=\dfrac{4-2i}{5}\end{array}\right.$$

$$=\left[\begin{array}{l}1-i\\ \dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i\end{array}\right.$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=1-i\ ,\ x=\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i}$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z (លំហាត់ដូចគ្រូបឋមឆ្នាំ ២០០៦)

គេតាង $z=a+bi$

នាំឱ្យ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$

$1-z=(1-a)-bi$

គេបាន $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$|1-z|=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$

ដោយ z , $\dfrac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូឌុលស្មើគ្នា គេបាន ៖

$$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$$

នាំឱ្យ $\begin{cases}a^2+b^2=1 & (1)\\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2} & (2)\end{cases}$

តាម (2) $a^2+b^2=(1-a)^2+b^2$

$a^2=1-2a+a^2$ នាំឱ្យ $a=1/2$

តាម (1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+b^2=1\ \Rightarrow\ b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ កំណត់បានចំនួនកុំផ្លិច $\boxed{z=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$ ។

II. **ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍** f :

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases}1+x^2\geq 0 & (1)\\ x+\sqrt{1+x^2}>0 & (2)\end{cases}$

តាម (1) $1+x^2\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

តាម (2) $x+\sqrt{1+x^2}>0$ ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}$

$1+x^2>x^2$

$\sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}$

$x+\sqrt{1+x^2}>x+|x|$

តែ $\forall x\in\mathbb{R}$, $x+|x|\geq 0$

នាំឱ្យ $x+\sqrt{1+x^2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អនុគមន៍ } f \text{ មានដែនកំណត់ } D=\mathbb{R}}$ ។

ខ. ➢បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

នាំឱ្យ $f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)$

$$=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$$
$$=\ln\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}$$
$$=\ln\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{-1}$$
$$=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x)$$

ដោយ $f(-x)=f(x)$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍សេស}}$ ។

➢បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើន

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

តាមរូបមន្ត $y=\ln(u)\ \Rightarrow\ y'=\dfrac{u'}{u}$

នាំឱ្យ $f'(x)=\dfrac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1+\dfrac{\left(1+x^2\right)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$ នាំឱ្យ $f'(x)>0$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើន $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

$$\mathbf{I}=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)(2+x)^n\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(2-x)(2+x)(2+x)^n\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(2-x)(2+x)^{n+1}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(4-2-x)(2+x)^{n+1}\,dx$$
$$=4\int_{-2}^{2}(2+x)^{n+1}\,dx-\int_{-2}^{2}(2+x)^{n+2}\,dx$$
$$=4\int_{-2}^{2}(2+x)'(2+x)^{n+1}\,dx-\int_{-2}^{2}(2+x)'(2+x)^{n+2}\,dx$$
$$=4\left[\frac{(2+x)^{n+2}}{n+2}\right]_{-2}^{2}-\left[\frac{(2+x)^{n+3}}{n+3}\right]_{-2}^{2}$$
$$=4\left(\frac{4^{n+2}}{n+2}-0\right)-\left(\frac{4^{n+3}}{n+3}-0\right)=\frac{4^{n+3}}{n+2}-\frac{4^{n+3}}{n+3}$$
$$=4^{n+3}\left(\frac{n+3-n-2}{(n+2)(n+3)}\right)=\boxed{\frac{4^{n+3}}{(n+2)(n+3)}}$$

$$\mathbf{J}=\int_{6}^{8}\frac{x}{x^2-6x+8}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{6}^{8}\frac{2x-6+6}{x^2-6x+8}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int_{6}^{8}\frac{2x-6}{x^2-6x+8}dx+\int_{6}^{8}\frac{6}{x^2-6x+8}dx\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int_{6}^{8}\frac{\left(x^2-6x+8\right)'}{x^2-6x+8}dx+6\int_{6}^{8}\frac{1}{(x-2)(x-4)}dx\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left[\ln\left|x^2-6x+8\right|\right]_{6}^{8}-3\int_{6}^{8}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}\right)dx\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left[\ln\left|x^2-6x+8\right|\right]_{6}^{8}-3\left[\ln\left|\frac{x-2}{x-4}\right|\right]_{6}^{8}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln 24-\ln 8-3\left(\ln\frac{3}{2}-\ln 2\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln 3-3(\ln 3-2\ln 2)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[6\ln 2-2\ln 3\right]=\boxed{3\ln 2-\ln 3}$$

IV. គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យប៊ូលដែលគេលូកយកចេញមានពណ៌ស :

គេមាន ថង់ A មានប៊ូល ស 30

ថង់ B មានប៊ូល ខ្មៅ 40

ថង់ C មានប៊ូល ស 10 , ក្រហម 25

ថង់ D មានប៊ូល ស 5 , ខៀវ 3 និង ក្រហម 2

ដើម្បីយកឱ្យបានឃ្លីស គេត្រូវចាប់ឱ្យបានថង់មួយ និងចាប់បាន ឃ្លីស គេបាន ៖

$P($ឃ្លីស$)=P(A$ស$)+P(C$ស$)+P(D$ស$)$

$$=\left(\frac{1}{4}\times\frac{30}{30}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{10}{35}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{5}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{8}=\frac{25}{56}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបយកបានឃ្លីស $P($ឃ្លីស$)=\dfrac{25}{56}$ ។

V. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងអ័ក្ស $z'oz$:

គេមាន $(\ell): x=t\ ,\ y=-3+3t\ ,\ z=-2+2t\ ,\ t\in\mathbb{R}$

ប្លង់ (P) កាត់តាមបន្ទាត់ ℓ និងកាត់ $A(1\,,2\,,1)$

ដោយ (ℓ) កាត់តាមចំណុចតាង $B(0\,,-3\,,-2)$ និងប្លង់ (P) កាត់តាមបន្ទាត់ (ℓ) នោះ (P) កាត់ B ដែរ

ហេតុនេះ (P) ជាប្លង់កាត់ A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ដែល

$\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (ℓ)

គេមាន $\vec{u}=(1\,,3\,,2)$ និង $\overrightarrow{AB}=(-1\,,-5\,,-3)$

$$\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&3&2\\-1&-5&-3\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$$

នាំឱ្យ $(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$(x-1)+(y-2)-2(z-1)=0$

ដោយ $(P)\cap(z'oz)$ នោះ $x=0\ ,\ y=0$

គេបាន $(0-1)+(0-2)-2(z-1)=0$ នោះ $z=-1/2$

ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វ (P) នឹងអ័ក្ស $z'oz$ គឺ $\left(0,0,-\dfrac{1}{2}\right)$ ។

VI. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ f :

គេមាន $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$ មានខ្សែកោង (C)

• ដែនកំណត់ : f មានន័យលុះត្រាតែ $x-2\neq 0$ ឬ $x\neq 2$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=(-\infty\,,2)\cup(2\,,+\infty)$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+1}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-3x+1}{x-2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-3x+1}{x-2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\pm\infty$ នោះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}=x-1-\dfrac{1}{x-2}$ ហើយ

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

• ទិសដៅអថេរភាព : ដេរីវេ

$$f'(x)=\frac{(x^2-3x+1)'(x-2)-(x-2)'(x^2-3x+1)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(2x-3)(x-2)-(x^2-3x+1)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^2-7x+6-x^2+3x-1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+5}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}=1+\frac{1}{(x-2)^2}>0\ ,\ \forall x\in D$$

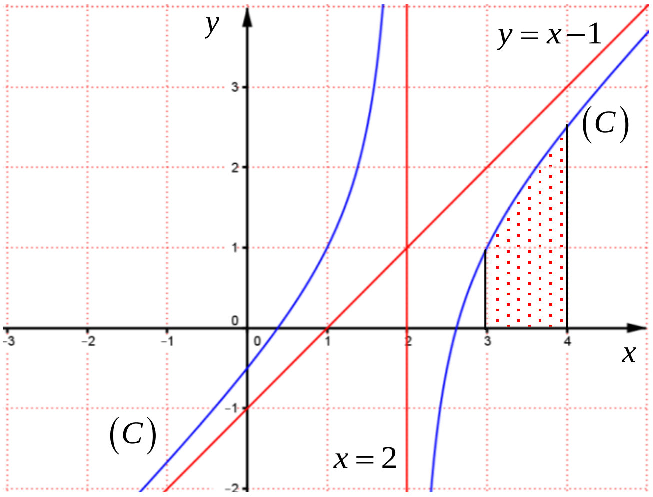
នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនលើ D គ្មានបរមាទេ

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

• ផ្ចិតឆ្លុះ : ចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតគឺ $(2,1)$

• សង់ក្រាប អាស៊ីតមតូត



ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង (C)

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 2 នោះ $f'(x)=2$

គេបាន $1+\dfrac{1}{(x-2)^2}=2$ ឬ $(x-2)^2=1$ នោះ $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

គេរកបាន $f(1)=1$ និង $f(3)=1$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

• ករណីប៉ះត្រង់ $(1\,,1)$ គេបាន $y=2(x-1)+1=2x-1$

• ករណីប៉ះត្រង់ $(3\,,1)$ គេបាន $y=2(x-3)+1=2x-5$

ដូចនេះ: **បន្ទាត់ប៉ះគឺ $y=2x-1$ និង $y=2x-5$** ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡា S

ផ្ទៃខណ្ឌដោយ (C) អ័ក្ស $x'ox$ និងបន្ទាត់ $x=3$ និង $x=4$

$$S=\int_3^4 f(x)\,dx=\int_3^4\left(x-1-\frac{1}{x-2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-x-\ln|x-2|\right]_3^4$$

$$=(8-4-\ln 2)-\left(\frac{9}{2}-3-0\right)$$

$$=4-\ln 2-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}-\ln 2$$

ដូចនេះ: **គណនាបាន $S=\dfrac{5}{2}-\ln 2$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា** ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ២៥ តុលា ២០១២

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

I. **(៣ ពិន្ទុ)** គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

ក. គណនាកន្សោម $A=1+z_1+z_1^2$ ។

ខ. សរសេរ z_1 , z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ គណនា $z_1^{2010}+z_2^{2010}$ ។

II. **(២ ពិន្ទុ)** ក. ដោះស្រាយសមីការ $2y''-3y'+y=0 \quad (E)$ ។

ខ. រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=2x+1$ ត្រង់ចំណុច $A(0,1)$ ។

III. **(៣ ពិន្ទុ)** គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}$, $x\neq -1$, $x\neq 3$ ។

ក. រក A , B និង C ដែល $f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$ ។

ខ. គណនា $I=\int f(x)dx$ ។

IV. **(៣ ពិន្ទុ)** គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ 2 គ្រាប់ព្រមគ្នា ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយមានពណ៌ខៀវ និងមួយទៀតពណ៌ក្រហម ។ រកប្រូបាប ៖

ក. លេខចេញលើគ្រាប់ពណ៌ខៀវ ស្មើនឹង 2 ដងនៃលេខចេញលើគ្រាប់ពណ៌ក្រហម ។

ខ. ផលបូកលេខលើគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរស្មើនឹង 5 ។

V. **(៤ ពិន្ទុ)** ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានស្វ៊ែ $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=16$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ែ (S) ជាមួយ $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$ ។

ខ. តាង A_1 , A_2 ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (S) និង $\overrightarrow{Ox}$ ។ រកសមីការប្លង់ដែលប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A_1 និង A_2 ។

VI. **(៥ ពិន្ទុ)** f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\frac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x}$ និងមានក្រាប (C) ។

ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពរបស់វា ។

ខ. រកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស រួចសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនោះ ។

គ. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះនោះ ។

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសមធ្យម ឆ្នាំ ២០១២

I. **ក. គណនាកន្សោម** $A=1+z_1+z_1^2$:

គេមាន $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

នាំឱ្យ $z_1^2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

គេបាន $A=1+z_1+z_1^2$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

ដូចនេះ គណនាបានកន្សោម $\boxed{A=0}$ ។

ខ. សរសេរ z_1 , z_2 **ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ**

ដោយ $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}$

និង $z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}}$

➤**គណនា** $z_1^{2010}+z_2^{2010}$

- $z_1^{2010}+z_2^{2010}$

$=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{2010}+\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{2010}$

$=(\cos 1340\pi+i\sin 1340\pi)+(\cos 2680\pi+i\sin 2680\pi)$

$=(\cos 0+i\sin 0)+(\cos 0+i\sin 0)$

$=(1+0i)+(1+0i)=2$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{z_1^{2010}+z_2^{2010}=2}$ ។

II. **ក. ដោះស្រាយសមីការ** (E) :

គេមាន $(E):\ 2y''-3y'+y=0$

សមីការសម្គាល់ $2\lambda^2-3\lambda+1=0$ មានឫស $\lambda=1$, $\lambda=\frac{1}{2}$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) រាង $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$, A,B ថេរ

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $\boxed{y=Ae^{x}+Be^{\frac{1}{2}x}}$ ។

ខ. រកចម្លើយមួយនៃ (E)

គេមាន $y=Ae^{x}+Be^{\frac{1}{2}x}$ នោះ $y'=Ae^{x}+\frac{1}{2}Be^{\frac{1}{2}x}$

ដោយ ក្រាបនៃចម្លើយ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=2x+1$ ត្រង់ចំណុច $A(0,1)$

គេបាន $\begin{cases}y'(0)=2\\ y(0)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+\frac{1}{2}B=2\\ A+B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-2\\ A=3\end{cases}$

ដូចនេះ ចម្លើយមួយនៃ (E) គឺ $\boxed{y=3e^{x}-2e^{\frac{1}{2}x}}$ ។

III. **ក. រក** A , B **និង** C :

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{A(x-3)^2+B(x+1)(x-3)+C(x+1)}{(x+1)(x-3)^2}$$

$$=\frac{A(x^2-6x+9)+B(x^2-2x-3)+C(x+1)}{(x+1)(x-3)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-6A-2B+C)+(9A-3B+C)}{(x+1)(x-3)^2}$$

ផ្ទឹមនឹង $f(x)=\frac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}$, $x\neq-1$, $x\neq 3$

គេបាន $\begin{cases}A+B=5 & (1)\\ -6A-2B+C=-14 & (2)\\ 9A-3B+C=13 & (3)\end{cases}$

យក $(3)-(2)$ គេបាន $15A-B=27$ (4)

យក $(1)+(4)$ គេបាន $16A=32$ នោះ $A=2$

តាម $(1): 2+B=5\Rightarrow B=3$

តាម $(3): 9\cdot 2-3\cdot 3+C=13\Rightarrow C=4$

ដូចនេះ រកបាន $\boxed{A=2\ ,\ B=3\ ,\ C=4}$ ។

ខ. គណនា $I=\int f(x)dx$

ចំពោះ $A=2$, $B=3$, $C=4$

គេបាន $f(x)=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}+\frac{4}{(x-3)^2}$

នាំឱ្យ $\mathbf{I}=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}+\frac{4}{(x-3)^2}\right)dx$

$=2\ln|x+1|+3\ln|x-3|-\frac{4}{x-3}+c$, c ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I}=2\ln|x+1|+3\ln|x-3|-\frac{4}{x-3}+c}$ ។

IV. **រកប្រូបាប**

គ្រាប់ឡុកឡាក់ 2 មួយខៀវ មួយក្រហម គេបោះព្រមគ្នា

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាចតាងដោយ $n(S)=6\times6=36$

ក. លេខចេញលើគ្រាប់ខៀវ ស្មើនឹង 2 ដងនៃលេខគ្រាប់ក្រហម :

លេខចេញលើគ្រាប់ខៀវ ស្មើនឹង 2 ដងនៃលេខគ្រាប់ក្រហម

មានបីករណីរួមមាន ៖ (ខ1ក្រ2) ឬ (ខ2ក្រ4) ឬ (ខ3ក្រ6)

នាំឱ្យ ចំនួនករណីស្របតាងដោយ $n(A)=3$

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{1}{12}}$ ។

ខ. ផលបូកលេខលើគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរស្មើនឹង 5

ផលបូកស្មើ 5 មាន 4 ករណីគឺ ៖

(ខ1ក្រ4) ឬ (ខ2ក្រ3) ឬ (ខ3ក្រ2) ឬ (ខ4ក្រ1)

នាំឱ្យ ចំនួនករណីស្របតាងដោយ $n(B)=4$

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{1}{9}}$ ។

V. **ក. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ែ (S) ជាមួយ**

$\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$

គេមាន $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=16$

• ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វនឹង $\overrightarrow{Ox}$ លុះត្រាតែ $y=0\ ,\ z=0$

គេបាន $(x-1)^2+(0-2)^2+(0+2)^2=16$

$(x-1)^2=8 \Rightarrow x=1\pm2\sqrt{2}$

ដូចនេះ ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ ត្រង់ពីរចំណុចគឺ

$\boxed{\left(1+2\sqrt{2}\ ,0\ ,0\right),\left(1-2\sqrt{2}\ ,0\ ,0\right)}$ ។

• ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វនឹង $\overrightarrow{Oy}$ លុះត្រាតែ $x=0\ ,\ z=0$

គេបាន $(0-1)^2+(y-2)^2+(0+2)^2=16$

$(y-2)^2=11 \Rightarrow y=2\pm\sqrt{11}$

ដូចនេះ ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វអ័ក្ស $\overrightarrow{Oy}$ ត្រង់ពីរចំណុចគឺ

$\boxed{\left(0\ ,2+\sqrt{11}\ ,0\right),\left(0\ ,2-\sqrt{11}\ ,0\right)}$ ។

• ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វនឹង $\overrightarrow{Oz}$ លុះត្រាតែ $x=0\ ,\ y=0$

គេបាន $(0-1)^2+(0-2)^2+(z+2)^2=16$

$(z+2)^2=11 \Rightarrow z=-2\pm\sqrt{11}$

ដូចនេះ ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វអ័ក្ស $\overrightarrow{Oz}$ ត្រង់ពីរចំណុចគឺ

$\boxed{\left(0\ ,0\ ,2+\sqrt{11}\right),\left(0\ ,0\ ,2-\sqrt{11}\right)}$ ។

ខ. រកសមីការប្លង់ដែលប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A_1 និង A_2

ដោយ $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=16$

នាំឱ្យ ស្វ៊ែមានផ្ចិត $I(1\ ,2\ ,-2)$

គេមាន $A_1\left(1+2\sqrt{2}\ ,0\ ,0\right)$, $A_2\left(1-2\sqrt{2}\ ,0\ ,0\right)$

ប្លង់ (P) រាង $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

• ករណីប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A_1\left(1+2\sqrt{2}\ ,0\ ,0\right)$

នោះគេបានប្លង់ (P_1) ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_1=\overrightarrow{IA_1}$

ដែល $\vec{n}_1=\overrightarrow{IA_1}=\left(2\sqrt{2}\ ,-2\ ,2\right)$ នាំឱ្យ ៖

$(P_1):\ 2\sqrt{2}\left(x-1-2\sqrt{2}\right)-2(y-0)+2(z-0)=0$

$2\sqrt{2}x-2y+2z-2\sqrt{2}-8=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P_1):\ 2\sqrt{2}x-2y+2z-2\sqrt{2}-8=0}$ ។

• ករណីប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A_2\left(1-2\sqrt{2}\ ,0\ ,0\right)$

នោះគេបានប្លង់ (P_2) ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_2=\overrightarrow{IA_2}$

ដែល $\vec{n}_2=\overrightarrow{IA_2}=\left(-2\sqrt{2}\ ,-2\ ,2\right)$ នាំឱ្យ ៖

$(P_2):\ -2\sqrt{2}\left(x-1-2\sqrt{2}\right)-2(y-0)+2(z-0)=0$

$-2\sqrt{2}x-2y+2z+2\sqrt{2}+8=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P_2):\ -2\sqrt{2}x-2y+2z+2\sqrt{2}+8=0}$ ។

VI. **ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់**

គេមាន $f(x)=\dfrac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$

គេបានលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់គឺ

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{e^x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\ ,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$ ។

➢សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពរបស់វា

គេមាន $f(x)=\dfrac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x}$

$$f'(x)=\frac{\left(2e^{2x}-5e^x\right)e^x-e^x\left(e^{2x}-5e^x+4\right)}{e^{2x}}$$

$$=\frac{\left(2e^{2x}-5e^x\right)-\left(e^{2x}-5e^x+4\right)}{e^x}$$

$$=\frac{e^{2x}-4}{e^x}=\frac{\left(e^x-2\right)\left(e^x+2\right)}{e^x}$$

គេឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\left(e^x-2\right)\left(e^x+2\right)}{e^x}=0$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ e^x>0\ ,\ e^x+2>0$

នាំឱ្យ $e^x-2=0 \Rightarrow x=\ln 2$

$$f(\ln 2)=\frac{e^{2\ln 2}-5e^{\ln 2}+4}{e^{\ln 2}}=\frac{4-10+4}{2}=-1$$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ត្រង់ $x=\ln 2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាមួយស្មើ $f(\ln 2)=-1$ ។

• សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

ខ. រកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស

បើក្រាប (C) ប្រសព្វអ័ក្ស $x'ox$ នោះ $y=f(x)=0$

គេបាន $\dfrac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x}=0$, $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ e^x>0$

នាំឱ្យ $e^{2x}-5e^x+4=0$, តាង $t=e^x$, $t>0$

គេបាន $t^2-5t+4=0$ មានឫសងាយ $t=1\ ,\ t=4$

$$\left[\begin{array}{l}t=1\\t=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^x=1\\e^x=4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\ln 4\end{array}\right.$$

ដូចនេះ ក្រាប (C) ប្រសព្វអ័ក្ស $x'ox$ ត្រង់ពីរចំណុចគឺ

$\boxed{(0\ ,0)\ ,\ (\ln 4\ ,0)}$ ។

➢សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនោះ

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

• ករណីបន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុច $(0\ ,0)$ គេបាន ៖

$f'(0)=\dfrac{e^0-4}{e^0}=-3$ និង $f(0)=0$

នាំឱ្យ $y=-3(x-0)+0=-3x$

• ករណីបន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុច $(\ln 4\ ,0)$ គេបាន ៖

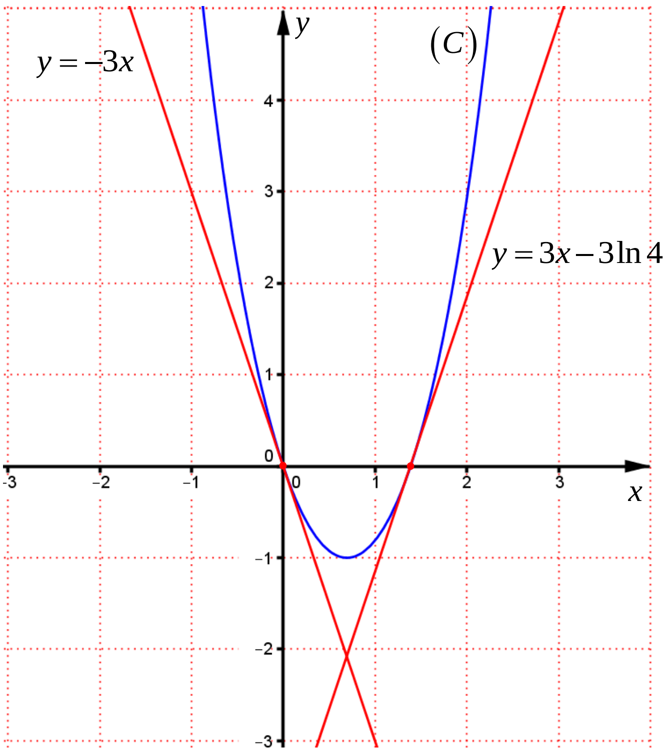
$f'(\ln 4)=\dfrac{e^{2\ln 4}-4}{e^{\ln 4}}=\dfrac{16-4}{4}=3$ និង $f(\ln 4)=0$

នាំឱ្យ $y=3(x-\ln 4)+0=3x-3\ln 4$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចប្រសព្វទាំងពីរគឺ

$\boxed{y=-3x\ ,\ y=3x-3\ln 4}$ ។

គ. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះនោះ



ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១៩ តុលា ២០១៣

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

I. ផ្នែកពីជគណិត

១. សហគ្រាសដំឡើងទោចក្រយានយន្តមួយបានចំណាយទឹកប្រាក់សរុបក្នុងមួយថ្ងៃសម្រាប់ដំឡើងទោចក្រយានយន្ត x គ្រឿង ចំនួន $f(x)=6x^2+22x+100$ គិតជាម៉ឺនរៀល ហើយសហគ្រាសនេះ បានទទួលប្រាក់ចំណូលមកវិញ ចំនួន $I(x)=5x^2+112x+200$ គិតជាម៉ឺនរៀល ។

ក. សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $P(x)$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

ខ .ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណេញ បើបរិមាត្រទោចក្រយានយន្តដែលបានលក់ កើនពី 30 គ្រឿង ទៅ 50 គ្រឿង ។ **(១ពិន្ទុ)**

២. ចូរគណនាតម្លៃប្រហែលនៃផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x):\ x=2-y-y^2$ និងអ័ក្សអរដោនេ $(y'y)$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

៣. ដោះស្រាយសមីការ $y'=-y\sin x$ ដោយដឹងថា $y(2\pi)=3e$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

៤. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^3-3x+2$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

ខ. ដោះស្រាយ និងពិភាក្សាតាមតម្លៃ m អត្ថិភាពនៃឫសរបស់សមីការ $x^3-3x+2-m=0$ ។ **(៤ពិន្ទុ)**

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

គេឱ្យពីរ៉ាមីត $SABCD$ មានបាត $ABCD$ ជាចតុកោណកែង ដែលមានបណ្ដោយ $AB=a$ ទទឹង $AD=b$ ទ្រនុង $(SA)\perp$ ប្លង់ $(ABCD)$ និងប្រវែង $SA=2a$ ។ M ជាចំណុចមួយ នៅលើទ្រនុង (SA) ដែល $AM=x$ ដោយ $0\le x\le 2a$ ។ ប្លង់ (MBC) កាត់ទ្រនុង (SD) នៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ត្រង់ N ។

ក. កំណត់រាងរបស់ចតុកោណ $BCNM$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

ខ. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យចតុកោណ $BCNM$ មានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត និងតូចបំផុត ។ **(៦ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០១៣

I. ចម្លើយផ្នែកពីជគណិត :

១. ក. សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $P(x)$

គេមាន អនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយ $f(x)=6x^2+22x+100$

អនុគមន៍ប្រាក់ចំណូល $I(x)=5x^2+112x+200$

(គិតជាម៉ឺនរៀល , x ជាចំនួនទោចក្រយានយន្ត)

នាំឱ្យ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញគឺ $P(x)$ ដែល

$$P(x)=I(x)-f(x)$$
$$=\left(5x^2+112x+200\right)-\left(6x^2+22x+100\right)$$
$$=-x^2+90x+100$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $\boxed{P(x)=-x^2+90x+100}$

ខ .ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណេញ

ប្រាក់ចំណេញបានពីការលក់ទោចក្រយានយន្តកើនពី 30 គ្រឿង ទៅ 50 គ្រឿង គឺ $\int_{30}^{50} P(x)\,dx$

$$=\int_{30}^{50}\left(-x^2+90x+100\right)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+45x^2+100x\right]_{30}^{50}$$
$$=\left(-\frac{50^3}{3}+45\cdot 50^2+100\cdot 50\right)-\left(-\frac{30^3}{3}+45\cdot 30^2+100\cdot 30\right)$$
$$=\frac{227500}{3}-34500=\frac{124000}{3}$$
$$=41333.333333 \text{ ម៉ឺនរៀល}$$

ដូចនេះ តម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណេញគឺ

$\boxed{413333333}$ រៀល ។

២. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាប (C) និងអ័ក្សអរដោនេ

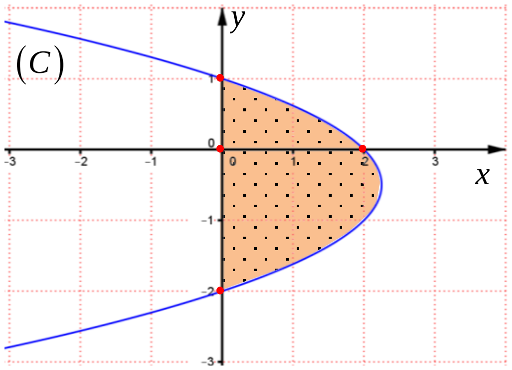
គេមាន $f(x):\ x=2-y-y^2$

រកចំណុចប្រសព្វរវាងអ័ក្ស $y'y$ និងក្រាប (C) នោះ $x=0$

គេបាន $2-y-y^2=0$ នោះ $y=1$, $y=-2$

ក្រាប (C) ជាប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេសង់រូបបាន ដូចខាងក្រោម ៖



នាំឱ្យ $S=\int_{-2}^{1}\left(2-y-y^2\right)dy$

$$S=\int_{-2}^{1}\left(2-y-y^2\right)dy$$
$$=\left[2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{1}$$
$$=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-2+\frac{8}{3}\right)$$
$$=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផ្ទៃគណនាបាន } S=\frac{9}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}}$ ។

៣. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

គេមាន $y'=-y\sin x$

$\frac{y'}{y}=-\sin x$ (បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ)

$\ln y=\cos x+c$, c ថេរ

នាំឱ្យ $y=e^{\cos x+c}$

ដោយ $y(2\pi)=3e$

គេបាន $e^{\cos 2\pi+c}=3e$ ដែល $\cos 2\pi=\cos 0=1$

$e^{1+c}=3e \Leftrightarrow e^c=3 \Rightarrow c=\ln 3$

នាំឱ្យ $y=e^{\cos x+\ln 3}=e^{\cos x}\cdot e^{\ln 3}=3e^{\cos x}$

ដូនេះ សមីការមានឫស $\boxed{y=3e^{\cos x}}$ ។

៤. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=x^3-3x+2$ (**ដូចគ្រូបឋម 2016**)

•ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

គេមាន $f(x)=x^3-3x+2$

ដេរីវេ : $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

គេឱ្យ $f'(x)=0$

$3(x-1)(x+1)=0$ នោះ $x=1\,,\,x=-1$

គេបាន $f(1)=1^3-3\cdot1+2=0$

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=4$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• បរមា

-ត្រង់ $x=-1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(-1)=4$ ។

-ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $f(1)=0$ ។

• លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-3x+2\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x+2\right)=+\infty$

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

• ភាពប៉ោងផត និងចំណុចរបត់

ដេរីវេទី២ $f''(x)=\left(3x^2-3\right)'=6x$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0$ នោះ $x=0$

- បើ $x>0$ នោះ $f''(x)>0$

នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងលើ

- បើ $x<0$ នោះ $f''(x)<0$

នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងក្រោម

- បើ $x=0$, $f''(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញា

នាំឱ្យ f មានចំណុចរបត់ $I(0,f(0))=I(0,2)$

• ផ្ចិតឆ្លុះ

គេនឹង បង្ហាញថា ចំណុចរបត់ $I(0\,,\,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង

បើ $I(a\,,\,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះលុះត្រាតែ $f(2a-x)+f(x)=2b$

គេបាន $f(-x)+f(x)=4$

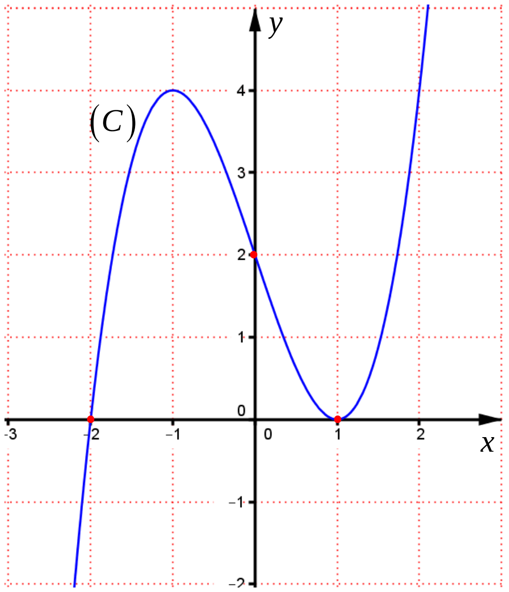
ដោយ $f(-x)+f(x)$

$=(-x)^3-3(-x)+2+x^3-3x+2$

$=-x^3+3x+2+x^3-3x+2=4$ ពិត

ដូចនេះ $I(0\,,\,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f ។

• សង់ក្រាប



ខ. ដោះស្រាយ និងពិភាក្សាតាមតម្លៃ m អត្ថិភាពនៃឫស

គេមាន សមីការ $x^3-3x+2-m=0$

គេបាន $m=x^3-3x+2$

ឫសនៃសមីការនេះបានពីប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ដេក $y=m$ និង ក្រាប C ។ តាមក្រាបគេបានអត្ថិភាពនៃឫសដូចខាងក្រោម ៖

• $m\in(-\infty\,,\,0)$: សមីការមានឫសតែមួយគត់ $x_1<0$

• $m=0$: សមីការមានឫសបី $x_1=-2\,,\,x_2=x_3=1$

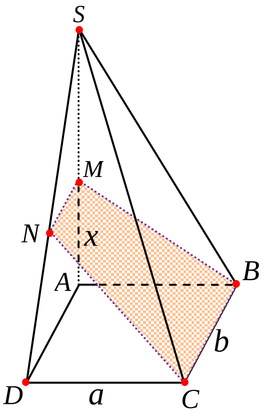
• $m\in(0\,,\,4)$: សមីការមានឫសបីផ្សេងគ្នា

• $m=4$: សមីការមានឫសបី $x_1=x_2=-1\,,\,x_3=2$

• $m\in(4\,,\,+\infty)$: សមីការមានឫសតែមួយគត់ $0<x_1$ ។

II. ចម្លើយផ្នែកធរណីមាត្រ :

ក. កំណត់រាងរបស់ចតុកោណ $BCNM$



គេមាន $(SA)\perp$ ប្លង់ $(ABCD)$ នាំឱ្យ ប្លង់ $(SAB)\perp[BC]$

នោះ $\begin{cases}(SAB)\perp[BC]\\ [MB]\subset(SAB)\end{cases}\Rightarrow [MB]\perp[BC]\ (1)$

គេមាន $\begin{cases}(SAD)\cap(BCNM)=[MN]\\ (BCNM)\perp(SAB)\\ (SAD)\perp(SAB)\end{cases}\Rightarrow[MN]\perp(SAB)$

នាំឱ្យ $[MN]\perp[MB]\ (2)$

តាម (1) និង (2) ចតុកោណ $BCNM$ ជាចតុ.ព្នាយកែង

ដូចនេះ $BCNM$ ជាចតុកោណព្នាយកែង ។

ខ. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យចតុកោណ $BCNM$ មានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត និងតូចបំផុត

ដោយ $BCNM$ ជាចតុកោណព្នាយកែង

នាំឱ្យ $S=S_{BCNM}=\dfrac{1}{2}(MN+BC)\cdot MB$

ដោយ ΔSMN និង ΔSAD ជាត្រីកោណកែងដែលមានមុំ $\angle S$ ជាមុំរួម នោះ $\Delta SMN\sim\Delta SAD$ (ម.ម)

វិបាក $\dfrac{MN}{AD}=\dfrac{SM}{SA}$ ឬ $\dfrac{MN}{b}=\dfrac{2a-x}{2a}$

នោះ $MN=\dfrac{2ab-xb}{2a}$ ដែល $0\le x\le 2a$

ម្យ៉ាងទៀត តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ $MB=\sqrt{MA^2+AB^2}$

នោះ $MB=\sqrt{x^2+a^2}$

គេបាន $S(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2ab-xb}{2a}+b\right)\cdot\sqrt{x^2+a^2}$

$$S(x)=\frac{1}{2}\left(2b-\frac{b}{2a}x\right)\sqrt{x^2+a^2}$$

$$S(x)=\left(b-\frac{b}{4a}x\right)\sqrt{x^2+a^2}$$

$$S'(x)=\left(-\frac{b}{4a}\right)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\left(b-\frac{b}{4a}x\right)$$

$$=\left(-\frac{b}{4a}\right)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\left(\frac{4ba-bx}{4a}\right)$$

$$=\frac{-b\left(x^2+a^2\right)}{4a\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{4abx-bx^2}{4a\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{-2bx^2+4abx-ba^2}{4a\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{b\left(-2x^2+4ax-a^2\right)}{4a\sqrt{x^2+a^2}}$$

ឱ្យ $S'(x)=0$ តែ $a,b,\ x>0$, $\dfrac{b}{4a\sqrt{x^2+a^2}}>0$

នោះ $-2x^2+4ax-a^2=0$ មាន

$$\Delta'=4a^2-2a^2=2a^2$$

$$x=\frac{-2a\pm\sqrt{2a^2}}{-2}=\frac{\left(2\pm\sqrt{2}\right)a}{2}$$

តារាងសញ្ញា $S'(x)$

x	0		$\frac{(2-\sqrt{2})a}{2}$		$\frac{(2+\sqrt{2})a}{2}$		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

•ត្រង់ $x=\dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)a}{2}$, $S'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា S មានតម្លៃតូចបំផុតមួយ ។

•ត្រង់ $x=\dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)a}{2}$, $S'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា S មានតម្លៃធំបំផុតមួយ ។

ដូចនេះ គេកំណត់តម្លៃនៃ x បានដូចខាងក្រោម ៖

បើ $x=\dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)a}{2}$ នោះ S_{BCNM} តូចបំផុត
បើ $x=\dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)a}{2}$ នោះ S_{BCNM} ធំបំផុត

។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ២០ វិច្ឆិកា ២០១៤

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

I. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $A=\int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}dx$ ខ. $B=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$ គ. $C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 x+\sin^3 x\right)dx$ ។ (3 ពិន្ទុ)

II. គេមានអនុគមន៍ពីរ $f(x)$ និង $g(x)$ ដែល $f(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)$ និង $g(x)=x-\ln(1+x)$ ។

ក. គណនាដេរីវេ $f(x)$ និង $g(x)$ រួចស្រាយបំភ្លឺថា គ្រប់តម្លៃ $x>0$ គេបាន $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ ។ (2 ពិន្ទុ)

ខ. គេមាន $u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$ ។ ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ ។ (1ពិន្ទុ)

III. គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ z និង w ដែល $z=2\sqrt{2}+4\frac{\sqrt{2}}{2}i$ និង $w=x(x-i)+y(y+i)$, $x,y\in\mathbb{R}$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (1 ពិន្ទុ)

ខ. សរសេរ z^4 ជាទម្រង់ $a+bi$ ។ (1 ពិន្ទុ)

គ. រកតម្លៃ x និង y បើ $w=-z^4$ ។ (1 ពិន្ទុ)

IV. គេមានអនុគមន៍ $y_1=-\frac{1}{4}x^4+2x^2+\frac{9}{4}$ ។

ក. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យប៉ារ៉ាបូល $y_2=-x^2+a$ ប៉ះខ្សែកោងអនុគមន៍ y_1 ។ (1 ពិន្ទុ)

ខ. ចូរសរសេរសមីការនៃប៉ារ៉ាបូល ទៅតាមតម្លៃ a ដែលបានរកឃើញក្នុងសំណួរ ក. ។ រួចបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះរបស់វាជាមួយខ្សែកោង y_1 ។ (2 ពិន្ទុ)

V. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេដៅ 4 ចំណុច

$A(2,1,3)$, $B(3,6,1)$, $C(2,0,2)$, $D(1,-5,4)$ ។

ក. ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ និងគណនា S_{ABCD} ។ (4 ពិន្ទុ)

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (D) កាត់តាមចំណុច A និងស្របនឹង $\overrightarrow{BC}$ ។ (2 ពិន្ទុ)

គ. សរសេរសមីការនៃប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A, B និង D ។ (2 ពិន្ទុ)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០១៤

I. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $A=\int_1^2\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}dx=\int_1^2\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}dx$

$=\int_1^2\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx=\left[x-4\sqrt{x}+\ln|x|\right]_1^2$

$=\left(2-4\sqrt{2}+\ln 2\right)-(1-4+0)$

$=\boxed{5-4\sqrt{2}+\ln 2}$

ខ. $B=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x\left(\cos x+2\sin x\right)}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos x dx=2\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(1-\frac{1}{2}\right)=\boxed{1}$

គ. $C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 x+\sin^3 x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\sin x\right)\left(1+\cos x\sin x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\cos^2 x\sin x+\sin x+\cos x\sin^2 x\right)dx$

$=\left[\sin x-\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(1-0-0+\frac{1}{3}\right)-\left(0-\frac{1}{3}-1+0\right)=\boxed{\frac{8}{3}}$

II. ក. គណនាដេរីវេ $f(x)$ និង $g(x)$:

គេមាន $f(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)$

ដូចនេះ: $\boxed{f'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}}$ ។

ហើយ $g(x)=x-\ln(1+x)$

ដូចនេះ: $\boxed{g'(x)=1-\frac{1}{1+x}}$ ។

ស្រាយថា គ្រប់តម្លៃ $x>0$ គេបាន $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$

ដោយ $f'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}$

$=\frac{1-x^2-1}{1+x}=-\frac{x^2}{1+x}<0\ ,\ \forall x>0$

នាំឱ្យ $\forall x>0$, f ជាអនុគមន៍ចុះ នាំឱ្យ $f(x)<0$

គេបាន $x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)<0$

$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)\quad (1)$

ដោយ $g'(x)=1-\frac{1}{1+x}$

$=\frac{1+x-1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0\ ,\ \forall x>0$

នាំឱ្យ $\forall x>0$, g ជាអនុគមន៍កើន នាំឱ្យ $g(x)>0$

គេបាន $x-\ln(1+x)>0$

$\ln(1+x)<x\quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$

ដូចនេះ: $\boxed{x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. គណនា $\lim_{n\to\infty}u_n$

គេមាន $u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$

នោះ: $u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$

$$+\begin{cases}\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\ln(1+0)=0\\ \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)=\ln(1+0)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=\ln(1+0)=0\end{cases}$$

$\lim_{x\to\infty}u_n=0$

ដូចនេះ: គណនាបាន $\boxed{\lim_{x\to\infty}u_n=0}$ ។

III. ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ :

គេមាន $z=2\sqrt{2}+4\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ ឬ $z=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$

មាន $r=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=4$

គេបាន $z=4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=4\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z=4\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$ ។

ខ. សរសេរ z^4 ជាទម្រង់ $a+bi$

គេមាន $z=4\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$z^4=\left[4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^4$$

$$=4^4\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$$

$$=256(-1+0i)=-256+0i$$

ដូចនេះ $\boxed{z^4=-256+0i}$ ។

គ. រកតម្លៃ x និង y បើ $w=-z^4$

គេមាន $w=x(x-i)+y(y+i)$, $x,y\in\mathbb{R}$

$$=x^2-xi+y^2+yi$$

$$=\left(x^2+y^2\right)+(-x+y)i$$

ដោយ $w=-z^4$ ដែល $-z^4=256+0i$ គេផ្ទឹមបាន ៖

$$\begin{cases}x^2+y^2=256\\-x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=256 & (1)\\x=y & (2)\end{cases}$$

គេយក (2) ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $2x^2=256 \Leftrightarrow x^2=128 \Rightarrow x=\pm8\sqrt{2}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{x=y=8\sqrt{2}\ ,\ x=y=-8\sqrt{2}}$ ។

IV. ក. រកតម្លៃ a :

គេមាន អនុគមន៍ $y_1=-\dfrac{1}{4}x^4+2x^2+\dfrac{9}{4}$

ប៉ារ៉ាបូល $y_2=-x^2+a$

គេបាន សមីការអាប់ស៊ីសរវាង y_1 និង y_2

$$-\frac{1}{4}x^4+2x^2+\frac{9}{4}=-x^2+a$$

$$-x^4+8x^2+9=-4x^2+4a$$

$$x^4-12x^2+4a-9=0$$

តាង $t=x^2$ ដែល $t\geq0$

គេបាន $t^2-12t+4a-9=0$

ដើម្បីឱ្យ y_2 ប៉ះជាមួយខ្សែកោង y_1 លុះត្រាសមីការមានឫសឌុប

នាំឱ្យ $\Delta'=0 \Leftrightarrow (-6)^2-(4a-9)=0$

គេបាន $36-4a+9=0 \Rightarrow a=\dfrac{45}{4}$

ដូចនេះ តម្លៃកបាន $\boxed{a=\dfrac{45}{4}}$ ។

ខ. សរសេរសមីការនៃប៉ារ៉ាបូល

ចំពោះ $a=\dfrac{45}{4}$ គេបាន សមីការប៉ារ៉ាបូល $y_2=-x^2+\dfrac{45}{4}$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាបូលសរសេរបានគឺ $\boxed{y_2=-x^2+\dfrac{9}{4}}$ ។

➢បញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ

ចំពោះ $a=\dfrac{45}{4}$ នោះគេបាន $t^2-12t+45-9=0$

$t^2-12t+36=0$ មានឫសឌុប $t_1=t_2=t=6$

ចំពោះ $t=6$ សមមូល $x^2=6 \Rightarrow x=\pm\sqrt{6}$

ករណី $x=\pm\sqrt{6}$ គេបាន $y=-\left(\pm\sqrt{6}\right)^2+\dfrac{45}{4}$

$y=-6+\dfrac{45}{4}$ នាំឱ្យ $y=\dfrac{21}{4}$

ដូចនេះ ចំណុចប៉ះមានពីរគឺ $\boxed{\left(-\sqrt{6}\,,\dfrac{21}{4}\right),\left(\sqrt{6}\,,\dfrac{21}{4}\right)}$ ។

V. ក. ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$:

គេមាន $A(2,1,3)$, $B(3,6,1)$,

$C(2,0,2)$, $D(1,-5,4)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(1,5,-2)$ និង $\overrightarrow{DC}=(1,5,-2)$

ដោយ ចតុកោណ $ABCD$ មាន $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(1,5,-2)$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចតុកោណ } ABCD \text{ ជាប្រលេឡូក្រាម}}$ ។

➢គណនា S_{ABCD}

តាមរូបមន្ត $S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$ ដែល $\overrightarrow{AD}=(-1,-6,1)$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\1 & 5 & -2\\-1 & -6 & 1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

នាំឱ្យ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{(-7)^2+(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{51}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{គណនាបាន } S=\sqrt{51} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}}$ ។

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (D)

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតរាង $(D):\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \ , t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

ដោយ (D) កាត់ $A(2,1,3)$

នោះ $x_0 = 2 , y_0 = 1 , z_0 = 3$

ហើយ (D) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{BC} = (-1,-6,1)$

នោះ $a = -1 , b = -6 , c = 1$

គេបាន $(D):\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 6t \ , t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាមែត $\boxed{(D):\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 6t \ , t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}}$ ។

គ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A , B និង D

សមីកាប្លង់ $(P): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

ដោយ (P) កាត់ $A(2,1,3)$

នោះ $x_0 = 2 , y_0 = 1 , z_0 = 3$

ហើយ (P) កាត់បីចំណុច A, B, D នាំឱ្យ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-7,1,-1)$ នោះ:

$a = -7 , b = 1 , c = -1$

គេបាន $(P): -7(x-2) + (y-1) - (z-3) = 0$

$-7x + y - z + 17 = 0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់គឺ $\boxed{(P): -7x + y - z + 17 = 0}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ២០១៥

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

I. ... (ក្នុងឆ្នាំ 2015 គ្មានការប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូកម្រិតមូលដ្ឋានផ្នែកគណិតវិទ្យាទេ ជ្រើសរើសតែគ្រូកីឡា និងគ្រូបឋម-មតេយ្យ ព្រោះដោយសារតែគេឱ្យនិទ្ទេស A , B , C ជាប់គ្រូដោយស្វ័យប្រវត្តិ ...) ។

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសមធ្យម ឆ្នាំ ២០១៥

I. (គ្មានចម្លើយ)

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ០៤ មិថុនា ២០១៦

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

ផ្នែកពីជគណិត

1. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖ **(២ ពិន្ទុ)**

ក. $\int(1+\cos x)^2\,dx+\int(1-\sin x)^2\,dx$ ខ. $\int\left(\dfrac{8x-7}{(x-2)(x+1)}\right)dx$

គ. $\int_0^{\pi}e^x\left(1+\dfrac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$ ឃ. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx$ ។

2. ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖ **(២ ពិន្ទុ)**

ក. $y''-3y'+2y=0$ ដោយដឹងថា $y(0)=1$ និង $y'(0)=3$ ។

ខ. $y''-2y'+y=0$ ដោយដឹងថា $y(0)=-3$ និង $y'(0)=2$ ។

3. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$, $z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$ និង $v=\dfrac{-(\sqrt{3}+1)}{2}+\dfrac{(1+\sqrt{3})}{2}i$ ។

ក. ចូរសរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

ខ. ចូរគណនាកន្សោម A ដែល $A=v+z_1+z_1^2$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

គ. ចូរគណនា w ដែល $w=z_1^{120}+z_2^{120}$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

4. ក្រុមហ៊ុនមួយត្រូវការជ្រើសរើសបុគ្គលិកបម្រើការងារ 5 នាក់ ។ ក្រោយពីផ្សព្វផ្សាយដំណឹងនេះ មាននិស្សិត 10 នាក់ ក្នុងនោះមានស្រី 4 នាក់ និងប្រុស 6 នាក់ មកដាក់ពាក្យសុំបម្រើការងារ ។ ចូររកប្រូបាបដែលជ្រើសរើសបានយ៉ាងតិចនិស្សិតស្រី 3 នាក់ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

5. គេមានអនុគមន៍ $f(x): y=\dfrac{x^2+5x+15}{(x+3)}$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

ខ. រកគ្រប់ចំណុចនៅលើខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។ **(១ ពិន្ទុ)**

គ. រកគ្រប់ចំណុច M នៅលើខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលមានចម្ងាយពីចំណុច M ទៅអ័ក្សអាប់ស៊ីសស្មើ 2 ដងនៃចម្ងាយពី M ទៅអ័ក្សអរដោនេ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

ឃ. ចូរសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹងខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ចំណុច $A(-2,9)$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

ផ្នែកធរណីមាត្រ

គេមានចំណុច $A(2,1,3)$ និងប្លង់ $(P): 2x+y+3z-28=0$ ។

ក. ចូររកចំណុច H និង A' ដោយ H ជាចំណោលកែងនៃ A មកលើប្លង់ (P) និង H ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AA']$ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

ខ. គណនាចម្ងាយពីចំណុច A មកលើប្លង់ (P) និងសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាមចំណុច $M(3,2,5)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។ **(២ ពិន្ទុ)**

គ. ចូរសរសេរសមីការទូទៅនៃប្លង់ (H) កាត់តាមចំណុច $I(3,-1,5)$ ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (AM) ។ **(១ ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០១៦

ផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $\int(1+\cos x)^2dx+\int(1-\sin x)^2dx$

$=\int\left(1+2\cos x+\cos^2 x\right)dx+\int\left(1-2\sin x+\sin^2 x\right)dx$

$=\int\left(1+2\cos x+\cos^2 x+1-2\sin x+\sin^2 x\right)dx$

$=\int(3+2\cos x-2\sin x)dx \quad , \ \cos^2 x+\sin^2 x=1$

$=\boxed{3x+2\sin x+2\cos x+c \ , c \ \text{ថេរ}}$

ខ. $\int\left(\frac{8x-7}{(x-2)(x+1)}\right)dx$

$=\int\left(\frac{8x+8-15}{(x-2)(x+1)}\right)dx$

$=\int\left(\frac{8(x+1)}{(x-2)(x+1)}-15\cdot\frac{1}{(x-2)(x+1)}\right)dx$

$=\int\left(\frac{8}{(x-2)}-15\cdot\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x+1)}\right]\right)dx$

$=8\ln|x-2|-5\left(\ln|x-2|-\ln|x+1|\right)+c \ , c$ ថេរ

$=\boxed{3\ln|x-2|+5\ln|x+1|+c \ , c \ \text{ថេរ}}$

គ. $\int_0^{\pi}e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$

$=\int_0^{\pi}\left(e^x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\left[e^x+\tan x\right]_0^{\pi}$

$=\left(e^{\pi}+\tan\pi\right)-\left(e^0+\tan 0\right)$

$=\left(e^{\pi}+0\right)-\left(e^0+0\right)=\boxed{e^{\pi}-1}$

ឃ. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

$=\left[\tan x-\cot x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\left(\tan\frac{\pi}{3}-\cot\frac{\pi}{3}\right)-\left(\tan\frac{\pi}{6}-\cot\frac{\pi}{6}\right)$

$=\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$

2. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម :

ក. គេមាន $y''-3y'+2y=0$ មានសមីការសម្គាល់

$\lambda^2-3\lambda+2=0$ មានឫស $\lambda_1=1 \ , \ \lambda_2=2$

ចម្លើយទូទៅមានរាង $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$, A , B ថេរ

គេបាន $y=Ae^x+Be^{2x}$, A , B ថេរ

នាំឱ្យ $y'=Ae^x+2Be^{2x}$

ដោយ $\begin{cases}y(0)=1\\ y'(0)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ae^0+Be^0=1\\ Ae^0+2Be^0=3\end{cases}$

$\begin{cases}A+B=1\\ A+2B=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=2\\ A=-1\end{cases}$

ដូចនេះ: $\boxed{y=-e^x+2e^{2x}}$ ។

ខ. គេមាន $y''-2y'+y=0$ មានសមីការសម្គាល់

$\lambda^2-2\lambda+1=0$ មានឫសឌុប $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0=1$

ចម្លើយទូទៅមានរាង $y=Axe^{\lambda_0 x}+Be^{\lambda_0 x}$, A , B ថេរ

គេបាន $y=Axe^x+Be^x$, A , B ថេរ

នាំឱ្យ $y'=A\left(e^x+xe^x\right)+Be^x$

ដោយ $\begin{cases}y(0)=-3\\ y'(0)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A\cdot 0\cdot e^0+Be^0=-3\\ A\left(e^0+0\cdot e^0\right)+Be^0=2\end{cases}$

$\begin{cases}B=-3\\ A+B=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-3\\ A=5\end{cases}$

ដូចនេះ: $\boxed{y=5xe^x-3e^x}$ ។

3. ក. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ :

គេមាន $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

ដូចនេះ: ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រដែលសរសេរបានគឺ ៖

$\boxed{z_1=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$\boxed{z_2=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$

ខ. គណនាកន្សោម A

គេមាន $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ និង $v=\frac{-\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}+\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}i$

ដោយ $z_1+z_1^2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^2$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}+\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

នាំឱ្យ $A=v+z_1+z_1^2$

$$=\frac{-\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}+\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}i+\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

$$=0$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{A=0}$ ។

គ. គណនា w ដែល $w=z_1^{120}+z_2^{120}$

$w=z_1^{120}+z_2^{120}$

$$=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{120}+\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]^{120}$$

$$=\cos(-20\pi)+i\sin(-20\pi)+\cos(20\pi)+i\sin(20\pi)$$

$$=\cos 0+i\sin 0+\cos 0+i\sin 0$$

$$=1+i\cdot 0+1+i\cdot 0=2$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{w=2}$ ។

4. រកប្រូបាបដែលជ្រើសរើសបានយ៉ាងតិចនិស្សិតស្រី 3 នាក់ :

គេមាន និស្សិត 10 នាក់ ប្រុស 6 នាក់ និងស្រី 4 នាក់

គេជ្រើសរើសបុគ្គលិក 5 នាក់

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(10\,,5)$ ដែល

$$C(10\,,5)=\frac{10!}{5!\,5!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5!}{5!\,5\cdot4\cdot3\cdot2}=252$$

ហើយ ជ្រើសរើសបានយ៉ាងតិចនិស្សិតស្រី 3 នាក់មានន័យថា អាចជ្រើសរើសបាននិស្សិតស្រី 3 នាក់ ឬ 4 នាក់ គេបាន៖

$$n(A)=C(4\,,3)C(6\,,2)+C(4\,,4)C(6\,,1)$$

$$=4\times\frac{6!}{4!\,2!}+1\times6=4\times\frac{6\cdot5\cdot4!}{4!\,2}+6$$

$$=4\times15+6=60+6=66$$

នាំឱ្យ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{66}{252}=\frac{11}{42}$

ដូចនេះ ប្រូបាប $\boxed{P(A)=\frac{11}{42}}$ ។

5. ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន អនុគមន៍ $f(x): y=\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}$

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x\neq-3$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{-3\}=(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព :

គេមាន $f'(x)=\left[\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}\right]'$

$$=\frac{\left(x^2+5x+15\right)'(x+3)-(x+3)'\left(x^2+5x+15\right)}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{(2x+5)(x+3)-\left(x^2+5x+15\right)}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{2x^2+6x+5x+15-x^2-5x-15}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}=\frac{x(x+6)}{(x+3)^2}$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{f'(x)=\frac{x(x+6)}{(x+3)^2}}$ ។

គេឱ្យ $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x(x+6)}{(x+3)^2}=0\ ,\ (x+3)^2>0$

នាំឱ្យ $x(x+6)=0$ នោះ $x=0\ ,\ x=-6$

គេបាន $f(0)=\frac{0^2+5\cdot0+15}{(0+3)}=5$

$$f(-6)=\frac{(-6)^2+5(-6)+15}{(-6+3)}=-7$$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-6		-3		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

• ត្រង់ $x=-6\ ,\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(-6)=-7$ ។

• ត្រង់ $x=0\ ,\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(0)=5$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-3^-} f(x)=\lim_{x\to-3^-}\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}=\frac{9-15+15}{-3+0^-+3}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-3^+} f(x)=\lim_{x\to-3^+}\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}=\frac{9-15+15}{-3+0^++3}=+\infty$$

ដោយ $\lim_{x\to-3} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=-3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

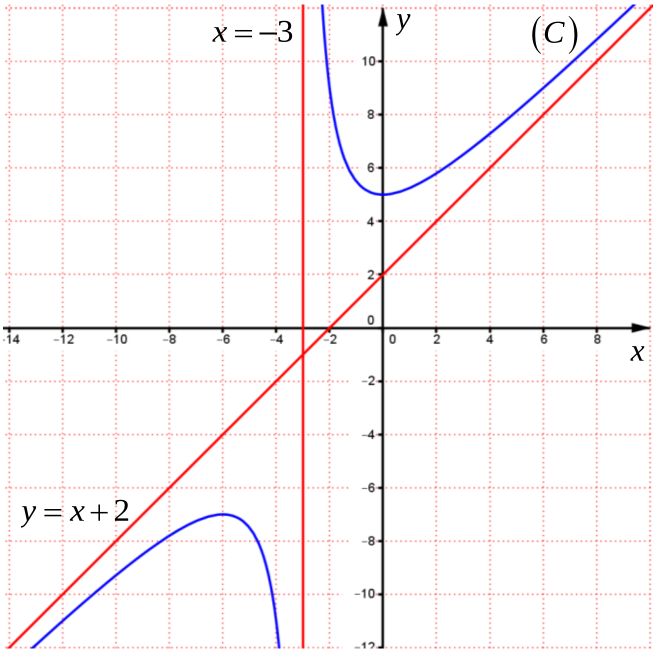
ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}=x+2+\frac{9}{x+3}$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9}{x+3}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	-6	-3	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	‖ −	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗ -7 ↘ $-\infty$		‖ $+\infty$ ↘ 5 ↗ $+\infty$		

➤សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍



• ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ f

ដោយ អាស៊ីមតូតឈរ $x=-3$ និងទ្រេត $y=x+2$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $I(-3,-1)$ ដែលជាផ្ចិតឆ្លុះ នៃក្រាប (C) ។

ខ. រកគ្រប់ចំណុចនៅលើខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

គេមាន $f(x)=y=x+2+\frac{9}{x+3}$

ដើម្បីឱ្យ y ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប លុះត្រាតែ $\frac{9}{x+3}$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប មានន័យថា 9 ចែកដាច់នឹង $x+3$ នោះគេបាន ៖

$$x+3=\{\pm1,\pm3,\pm9\}$$

នាំឱ្យ $x=-4$ នាំឱ្យ $y=-4+2+\frac{9}{-4+3}=-11$

$x=-2$ នាំឱ្យ $y=-2+2+\frac{9}{-2+3}=9$

$x=-6$ នាំឱ្យ $y=-6+2+\frac{9}{-6+3}=-7$

$x=0$ នាំឱ្យ $y=0+2+\frac{9}{0+3}=5$

$x=-12$ នាំឱ្យ $y=-12+2+\frac{9}{-12+3}=-11$

$x=6$ នាំឱ្យ $y=6+2+\frac{9}{6+3}=9$

ដូចនេះ ចំណុចដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបមាន៖

$(-4,-11),(-2,9),(-6,-7)$
$(0,5),(-12,-11),(6,9)$ ។

គ. រកគ្រប់ចំណុច M នៅលើខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេតាង $M(x_M\ ,y_M)$ ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង

គេបាន $y_M=\frac{x_M^2+5x_M+15}{(x_M+3)}$ ដែល $x_M\neq-3$

$$y_M(x_M+3)=x_M^2+5x_M+15$$

ដោយ ចម្ងាយពីចំណុច M ទៅអ័ក្សអាប់ស៊ីសស្មើ 2 ដងនៃចម្ងាយពី M ទៅអ័ក្សអរដោនេ នាំឱ្យ $y_M=2x_M$

នាំឱ្យ $2x_M(x_M+3)=x_M^2+5x_M+15$

$$2x_M^2+6x_M=x_M^2+5x_M+15$$

$$x_M^2+x_M-15=0$$

មាន $\Delta=1-4(-15)=61$

នោះ $x_M=\frac{-1-\sqrt{61}}{2}$, $x_M=\frac{-1+\sqrt{61}}{2}$

ចំពោះ $x_M=\frac{-1-\sqrt{61}}{2}$ នាំឱ្យ $y_M=-1-\sqrt{61}$

ចំពោះ $x_M=\frac{-1+\sqrt{61}}{2}$ នាំឱ្យ $y_M=-1+\sqrt{61}$

ដូចនេះ $M\left(\frac{-1-\sqrt{61}}{2}\,,-1-\sqrt{61}\right)$ ឬ

$M\left(\frac{-1+\sqrt{61}}{2}\,,-1+\sqrt{61}\right)$ ។

ឃ. សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ (d)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $(\mathrm{d}): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ដោយ បន្ទាត់ (d) ប៉ះខ្សែកោងត្រង់ចំណុច $A(-2\,,9)$

នោះ $x_0=-2\,,\ y_0=f(x_0)=9$

គេបាន $f'(x_0)=f'(-2)=\frac{-2(-2+6)}{(-2+3)^2}=-8$

នាំឱ្យ $(\mathrm{d}): y=-8(x+2)+9$ ឬ $y=-8x-7$

ដូចនេះ សរសេរបាន $(\mathrm{d}): y=-8x-7$ ។

ផ្នែកធរណីមាត្រ

ក. រកចំណុច H

គេតាង $H(x_H\,,y_H\,,z_H)$ ជាចំណុចដែលត្រូវរក

គេមាន ចំណុច $A(2\,,1\,,3)$

និងប្លង់ $(P): 2x+y+3z-28=0$ ដែលមាន

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2\,,1\,,3)$

ហើយ $\overrightarrow{AH}=(x_H-2\,,y_H-1\,,z_H-3)$

ដោយ H ជាចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់ (P) មានន័យថា

$\overrightarrow{AH}\perp(P)$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AH}\parallel\vec{n}$ គេបាន ៖

$$\frac{x_H-2}{2}=\frac{y_H-1}{1}=\frac{z_H-3}{3}$$

ទាញបាន $\begin{cases}\frac{x_H-2}{2}=\frac{y_H-1}{1} \Rightarrow y_H=\frac{x_H}{2}\\ \frac{x_H-2}{2}=\frac{z_H-3}{3} \Rightarrow z_H=\frac{3x_H}{2}\end{cases}$

ម្យ៉ាងទៀត $H\in(P)$ នោះ $2x_H+y_H+3z_H-28=0$

គេបាន $2x_H+\frac{x_H}{2}+3\cdot\frac{3x_H}{2}-28=0$

$4x_H+x_H+9x_H-56=0$ នោះ $x_H=4$

នាំឱ្យ $\begin{cases}y_H=\frac{x_H}{2}=\frac{4}{2}=2\\ z_H=\frac{3x_H}{2}=\frac{3\cdot4}{2}=6\end{cases}$

ដូចនេះ រកបានចំណុច $H(4\,,2,6)$ ។

➤**រកចំណុច** A'

ដោយ $H(4\,,2\,,6)$ ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ AA'

គេបាន $\left(\frac{x_A+x_{A'}}{2}\,,\frac{y_A+y_{A'}}{2}\,,\frac{z_A+z_{A'}}{2}\right)=(4\,,2\,,6)$

$\left(\frac{2+x_{A'}}{2}\,,\frac{1+y_{A'}}{2}\,,\frac{3+z_{A'}}{2}\right)=(4\,,2\,,6)$

នាំឱ្យ $\begin{cases}2+x_{A'}=8\\1+y_{A'}=4\\3+z_{A'}=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{A'}=6\\y_{A'}=3\\z_{A'}=9\end{cases}$

ដូចនេះ រកបានចំណុច $A'(6\,,3,9)$ ។

ខ. គណនាចម្ងាយពីចំណុច A **មកលើប្លង់** (P)

ដោយ $d(A\,,(P))=AH$

ដែល $\left|\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{(x_H-2)^2+(y_H-1)^2+(z_H-3)^2}$

$=\sqrt{(4-2)^2+(2-1)^2+(6-3)^2}$

$=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$

ដូចនេះ $d(A\,,(P))=AH=\left|\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{14}$ ឯកតាប្រវែង

➤**សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់** (Δ)

សមីការបន្ទាត់ត្រូវរកមានរាង $(\Delta):\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\ ,\ t\in\mathbb{R}\\z=z_0+ct\end{cases}$

ដោយ បន្ទាត់ (Δ) កាត់តាមចំណុច $M(3\,,2\,,5)$ និង

កែងនឹងប្លង់ (P) នោះ (Δ) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស

$\vec{u}=\vec{n}=(2\,,1\,,3)$

ដូចនេះ $(\Delta):\begin{cases}x=3+2t\\y=2+t\quad ,\ t\in\mathbb{R}\\z=5+3t\end{cases}$ ។

គ. សរសេរសមីការទូទៅនៃប្លង់ (H)

ប្លង់រាង $(H): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ ប្លង់ (H) កាត់តាមចំណុច $I(3\,,-1\,,5)$ និង

កែងនឹងបន្ទាត់ (AM) នោះប្លង់ (H) មានវ៉ិចទ័រ

ណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AM}=(1\,,1\,,2)$

គេបាន $(H):(x-3)+(y+1)+2(z-5)=0$

$(H): x+y+2z-12=0$

ដូចនេះ $(H): x+y+2z-12=0$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ២៧ តុលា ២០១៧

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$ ។ ចូររកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ រួចគណនាកន្សោម

$I=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx$ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

2. ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖ **(២ ពិន្ទុ)**

ក. $y'-y\sin x=0$ ចំពោះ $y(0)=e$ ។

ខ. $y''+2y'-15y=0$ ចំពោះ $y(0)=5$ និង $y'(0)=-1$ ។

3. ក្នុងប្រអប់មួយមានប៊ិចខៀវ 8 ដើម និងប៊ិចក្រហម 7 ដើម ។ អ្នកគ្រូលីដាចាប់យកប៊ិច 5 ដើមព្រមគ្នាពីប្រអប់នោះដោយចៃដន្យទុកសម្រាប់លើកទឹកចិត្តសិស្សពេលបង្រៀននៅថ្ងៃស្អែក ។

ក. រកប្រូបាបដែលគាត់ចាប់បានប៊ិចខៀវ 2 ដើម និងប៊ិចក្រហម 3 ដើម ។ **(១ ពិន្ទុ)**

ខ. រកប្រូបាបដែលគាត់ចាប់បានប៊ិចក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច ។ **(១ ពិន្ទុ)**

4. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=-x^3-3x^2+1$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង C នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ **(៣ ពិន្ទុ)**

ខ. ស្រាយបំភ្លឺថាចំណុចរបត់ I របស់ខ្សែកោង C ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោងនោះ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

គ. ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ស្របនឹងបន្ទាត់ $d: y=-9x+1$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. នៅក្នុងលំហនៃតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបន្ទាត់ d កាត់តាមចំណុច $I(1,-3,3)$ ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}=(-1,2,1)$ និងមានប្លង់ P មួយដែលមានសមីការ $P: 2x+y-2z+9=0$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ d និងរកកូអរដោនេនៃចំណុច D នៅលើបន្ទាត់ d ដោយដឹងថា ចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ P ស្មើនឹង 2 ។ **(៣ ពិន្ទុ)**

ខ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ d និងប្លង់ P ។ **(២ ពិន្ទុ)**

2. គេមានប៉ារ៉ាបូលដែលមានចំណុចកំណុំ $F(5,2)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានសមីការ $x+1=0$ ។

ចូររកកំពូល V នៃប៉ារ៉ាបូល រួចសរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ ។ **(៤ ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០១៧

I. ផ្នែកពិជគណិត

1. រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$, តាមរូបមន្ត $\ln u=\frac{u'}{u}$

នាំឱ្យ $f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)'}{x+\sqrt{x^2+2}}=\frac{1+\frac{\left(x^2+2\right)'}{2\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}$

$=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

ដូចនេះ: $\boxed{f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}}$ ។

គណនាកន្សោម I

គេមាន $I=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx$ ទាញពីលទ្ធផលខាងលើ

គេបាន $I=\int_0^1 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^1$ ជាចំនួនថេរ

$=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right]_0^1$

$=\ln\left(1+\sqrt{3}\right)-\ln\left(\sqrt{2}\right)$

$=\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$

ដូចនេះ: $\boxed{I=\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)}$ ។

2. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. គេមាន $y'-y\sin x=0$ **ចំពោះ:** $y(0)=e$

គេបាន $\frac{y'}{y}=\sin x$ (បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ)

$\ln|y|=-\cos x+c$

$|y|=e^{-\cos x+c}$

$y=\pm e^{-\cos x+c}$

$y=\pm e^c\cdot e^{-\cos x}=Ae^{-\cos x}$ ដែល $A=\pm e^c$ ថេរ

ដោយ $y(0)=e$ នោះ: $Ae^{-\cos 0}=e$ នាំឱ្យ $A=e^2$

គេបាន $y=Ae^{-\cos x}=e^2\cdot e^{-\cos x}=e^{2-\cos x}$

ដូចនេះ: $\boxed{y=e^{2-\cos x}}$ ជាចម្លើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម ។

ខ. គេមានសមីការ $y''+2y'-15y=0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2+2\lambda-15=0$

គេបាន $\Delta'=1+15=16$

នាំឱ្យ $\lambda_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=-1-\sqrt{16}=-5$

$\lambda_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=-1+\sqrt{16}=3$

ចម្លើយទូទៅមានរាង $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$ ដែល A , B ថេរ

នាំឱ្យ $y=Ae^{-5x}+Be^{3x}$

$y'=-5Ae^{-5x}+3Be^{3x}$

ដោយ $y(0)=5$ និង $y'(0)=-1$

គេបាន $\begin{cases} y(0)=Ae^0+Be^0=5 \\ y'(0)=-5Ae^0+3Be^0=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} A+B=5 \\ -5A+3B=-1 \end{cases} \Rightarrow A=2\ ,\ B=3$

ដូចនេះ: $\boxed{y=2e^{-5x}+3e^{3x}}$ ។

3. រកប្រូបាបដែលគាត់ចាប់បាន:

គេមាន ប៊ិចខៀវ 8 ដើម និងប៊ិចក្រហម 7 ដើម

អ្នកគ្រូលីដាចាប់យកប៊ិច 5 ដើម ដោយចៃដន្យ

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(15,5)$

$n(S)=\frac{15!}{10!\times 5!}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!}\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=3003$

ក. ប៊ិចខៀវ 2 ដើម និងប៊ិចក្រហម 3 ដើម

តាង A: ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប៊ិចខៀវ 2 និងក្រហម 3 ដើម

គេបាន $n(A)=C(8\ ,\ 2)\times C(7\ ,\ 3)$

$n(A)=\frac{8!}{6!\cdot 2!}\times\frac{7!}{4!\cdot 3!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 2}\times\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 6}=980$

ដូចនេះ: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{980}{3003}=\boxed{\frac{140}{429}}$ ។

ខ. ប៊ិចក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច

តាង B: ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប៊ិចក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច

នោះ: $\overline{B}$: ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប៊ិចខៀវទាំងអស់ 5 ដើម

ដែល B និង $\overline{B}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញគ្នា $P(B)+P\left(\overline{B}\right)=1$

ដោយ $n\left(\overline{B}\right)=C(8\,,5)=\dfrac{8!}{3!\cdot 5!}=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \not{5}!}{6\cdot \not{5}!}=56$

នាំឱ្យ $P\left(\overline{B}\right)=\dfrac{n\left(\overline{B}\right)}{n(S)}=\dfrac{56}{3003}=\dfrac{8}{429}$

គេបាន $P(B)=1-P\left(\overline{B}\right)=1-\dfrac{8}{429}=\dfrac{421}{429}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{421}{429}}$ ។

4. ក. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមនុគមន៍ f

គេមាន $f(x)=-x^3-3x^2+1$ (**ដូចគ្រូអនុ. 2013**)

•ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty\,,+\infty)}$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

គេមាន $f(x)=-x^3-3x^2+1$

ដេរីវេ : $f'(x)=-3x^2-6x=-3x(x+2)$

គេឱ្យ $f'(x)=0$

$-3x(x+2)=0$ នោះ $x=0\,,x=-2$

គេបាន $f(0)=-0^3-3\cdot 0^2+1=1$

$f(-2)=-(-2)^3-3(-2)^2+1=-3$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

•បរមា

-ត្រង់ $x=-2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $f(-2)=-3$ ។

-ត្រង់ $x=0$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(0)=1$ ។

•លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3-3x^2+1\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3-3x^2+1\right)=-\infty$

•តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

•ភាពប៉ោង និងភាពផត

ដេរីវេទី២ $f''(x)=\left(-3x^2-6x\right)'=-6x-6$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow -6x-6=0$ នោះ $x=-1$ ជាឫស

- បើ $x>-1$ នោះ $f''(x)<0$

នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតចុះខាងក្រោម

- បើ $x<-1$ នោះ $f''(x)>0$

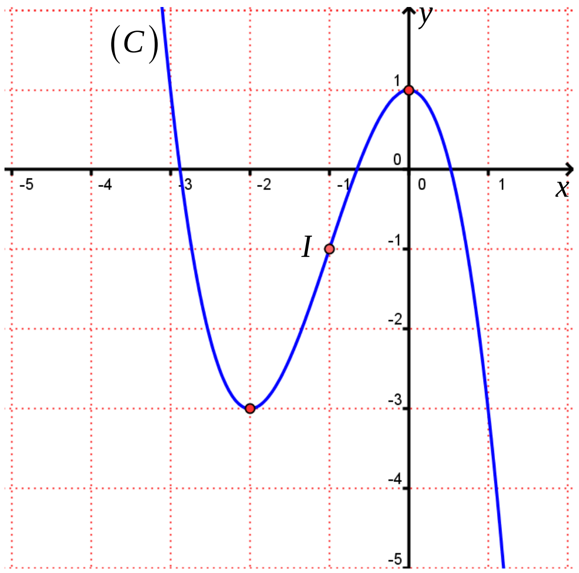
នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងលើ

- បើ $x=-1$, $f''(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញា

នាំឱ្យ f មានចំណុចរបត់មួយតាងដោយ I ដែល

$I(-1,f(-1))$ ឬ $I(-1,-1)$

•សង់ក្រាប



ខ. ស្រាយបំភ្លឺថាចំណុចរបត់ I ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោងនោះ

គេនឹង បង្ហាញថាចំណុចរបត់ $I(-1\,,-1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង

បើ $I(a\,,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ លុះត្រាតែ $f(2a-x)+f(x)=2b$

គេបាន $f(-2-x)+f(x)=-2$

ដោយ $f(-2-x)=-(-2-x)^3-3(-2-x)^2+1$

$=(2+x)^3-3(2+x)^2+1$

$=8+12x+6x^2+x^3-12-12x-3x^2+1$

$=x^3+3x^2-3$

នាំឱ្យ $f(-x)+f(x)$

$=\left(x^3+3x^2-3\right)+\left(-x^3-3x^2+1\right)$

$=-2$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{I(-1\,,-1)\text{ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង } C}$ ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ស្របនឹងបន្ទាត់ d

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $T: y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ដោយ $T//d: y=-9x+1$ នោះ $f'(x_0)=-9$

គេបាន $-3x_0^2-6x_0=-9$ ឬ $x_0^2+2x_0-3=0$

ករណីពិសេស $a+b+c=0$ នោះ $x_0=1$, $x_0=-3$

• ចំពោះ $x_0=1$ នោះគេបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ

$$T_1: y=-9(x-1)+f(1)$$
$$=-9x+9+\left(-1^3-3\cdot 1^2+1\right)$$
$$=-9x+6$$

• ចំពោះ $x_0=-3$ នោះគេបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ

$$T_2: y=-9(x+3)+f(-3)$$
$$=-9x-27+\left[-(-3)^3-3\cdot(-3)^2+1\right]$$
$$=-9x-26$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាប C ស្របនឹងបន្ទាត់ d មានពីរបន្ទាត់គឺ $T_1: y=-9x+6$, $T_2: y=-9x-26$

II. ផ្នែកគណិតវិទ្យា

1. ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ d

ដោយ d កាត់តាមចំណុច $I(1,-3,3)$

នោះ $x_0=1$, $y_0=-3$, $z_0=3$

ហើយ d ស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}=(-1,2,1)$

នោះ $a=-1$, $b=2$, $c=1$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ d មានរាងទូទៅ

$$d:\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \ , \ t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

ដូចនេះ $$d:\begin{cases} x=1-t \\ y=-3+2t \ , t\in\mathbb{R} \\ z=3+t \end{cases}$$

រកកូអរដោនេនៃចំណុច D នៅលើបន្ទាត់ d

ដោយដឹងថា ចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (P) ស្មើនឹង 2

តាមរូបមន្ត ចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (P) កំណត់ដោយ

$$d(D,(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ដោយ $P: 2x+y-2z+9=0$

នោះ $a=2$, $b=1$, $c=-2$, $d=9$

ហើយ D នៅលើបន្ទាត់ d

នោះ $x_0=1-t$, $y_0=-3+2t$, $z_0=3+t$, $t\in\mathbb{R}$

គេបាន $$\frac{|2(1-t)+(-3+2t)-2(3+t)+9|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=2$$

$$\frac{|2-2t-3+2t-6-2t+9|}{\sqrt{4+1+4}}=2$$

$$|2-2t|=6$$

$$|1-t|=3$$

$$\left[\begin{array}{l} 1-t=3 \\ 1-t=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=4 \end{array}\right.$$

• ចំពោះ $t=-2$: នោះ $D(x_0=3\ , y_0=-7\ , z_0=1)$

• ចំពោះ $t=4$: នោះ $D(x_0=-3\ , y_0=5\ , z_0=7)$

ដូចនេះ ចំណុច D នៅលើបន្ទាត់ d មានពីរចំណុចគឺ

$D_1(3,-7,1)$, $D_2(-3,5,7)$ ។

ខ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ d និងប្លង់ P

គេមាន $d: x=1-t$, $y=-3+2t$, $z=3+t$, $t\in\mathbb{R}$

$P: 2x+y-2z+9=0$

គេបាន $2(1-t)+(-3+2t)-2(3+t)+9=0$

$2-2t-3+2t-6-2t+9=0$

$2-2t=0 \Rightarrow t=1$

នាំឱ្យ $A(x=1-1\ , y=-3+2\ , z=3+1)$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ $A(0,-1,4)$ ។

2. រកកំពូល V នៃប៉ារ៉ាបូល

គេមាន កំណុំប៉ារ៉ាបូល $F(5,2)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=-1$

នាំឱ្យ ប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះដេក មានកំពូល $V(h,k)$

ដោយ បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=h-p=-1$

$F(h+p,k)=F(5,2)$ នោះ $h+p=5$, $k=2$

គេបាន $$\begin{cases} h-p=-1 \\ h+p=5 \end{cases} \Rightarrow h=2\ ,\ p=3$$

ដូចនេះ កូអរដោនេកំពូលគឺ $V(h=2\ , k=2)$ ។

សរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ

សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះដេកកំណត់ដោយ

$(y-k)^2=4p(x-h)$ តែដោយ $h=2$, $k=2$, $p=3$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាគឺ $(y-2)^2=12(x-2)$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ៖..............................

បន្ទប់លេខ៖........................

តុលេខ៖..............................

ហត្ថលេខា៖.........................

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ
[illegible]

សម័យប្រឡង ៖ ថ្ងៃទី០៨ ខែវិច្ឆិកា ឆ្នាំ២០១៨

វិញ្ញាសា ៖ **គណិតវិទ្យា** (ឯកទេសទី១)

រយៈពេល ៖ ២ម៉ោង

ប្រធាន ៖

I. ពីជគណិត

១. ទីធ្លាមួយមានរាងចតុកោណកែង ដែលមានផ្ទៃក្រឡាស្មើនឹង $72m^2$ ហើយបរិមាត្រស្មើនឹង $36m$ ។ ចូររកប្រវែងទទឹង និងបណ្ដោយនៃទីធ្លានោះ ។ (១ពិន្ទុកន្លះ)

២. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 3+2(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$ និង $z_2 = -3+2i\sqrt{3}$ ។គណនា z_1+z_2 និងសរសេរ z_1+z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ សរសេរ $\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^{36}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។ (១ពិន្ទុកន្លះ)

៣. ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សចំនួន12 នាក់ ដែលក្នុងនោះមានសិស្សស្រីចំនួន5 នាក់ និងសិស្សប្រុសចំនួន7 នាក់ គេរៀបចំសិស្សជាក្រុមសម្អាតថ្នាក់ ក្នុងមួយក្រុមមានសិស្ស4 នាក់ដោយចៃដន្យ ។ ចូររកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម ÷
A: "ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែជាសិស្សប្រុស" ។ B:"ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានពាក់កណ្ដាលជាសិស្សស្រី" ។(២ពិន្ទុ)

៤. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ÷

ក. $I=\int_0^3\left[(2x+1)(x+3)\right]dx$ ។(១ពិន្ទុ) ខ. $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{\sin^2 2x}{4})dx$ ។(១ពិន្ទុ) គ. $K=\int_{-6}^{6}(2xe^{x^2})dx$ ។(១ពិន្ទុ)

៥. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0;+\infty)$ ដោយ $f(x)=\frac{x^2-\ln x+x}{x}$ និងយើងតាងដោយ C ក្រាបរបស់វាក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. បង្ហាញថានៅលើចន្លោះ $(0;+\infty)$, $f(x)=x+1-\frac{\ln x}{x}$ ។ សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។ (១ពិន្ទុកន្លះ)

ខ. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$ ។ (១ពិន្ទុ)

គ. ដោយដឹងថាកន្សោម $(x^2-1+\ln x)$ យកតម្លៃអវិជ្ជមានដាច់ខាតលើចន្លោះ $(0;1)$ ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $(0;+\infty)$ ។ (១ពិន្ទុកន្លះ)

ឃ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y=x+1$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។ ចូរសិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹង Δ រួចសង់ បន្ទាត់ Δ និងក្រាប C ។ (២ពិន្ទុ)

II. ធរណីមាត្រ

១. នៅក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(4,3,2)$, $B(6,5,3)$, $C(7,6,4)$, $D(5,4,3)$ ។ រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ហើយទាញបង្ហាញថាចតុកោណ ABCD ជាប្រលេឡូក្រាម ។ (២ពិន្ទុ)

២. គេមានសមីការ: $\left(\frac{2y-3x}{18}\right)\left(\frac{2y+3x}{2}\right)=1$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល ។ ចូររកកូអរដោនេរបស់កំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីររបស់អ៊ីពែបូលនេះ និងសង់អ៊ីពែបូលនេះ ។ (៤ពិន្ទុ)

អត្រាកំណែការប្រឡងជ្រើសរើស
គ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន
សម័យប្រឡង 04 វិច្ឆិកា 2018
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (វគ្គទី1)

I. ពិជគណិត

១. (1.50 ពិន្ទុ)

+ តាងប្រវែងទទឹងនិងបណ្តោយនៃចតុកោណកែង

តាង x និង y ជាប្រវែងបណ្តោយ និងទទឹងរៀងគ្នានៃចតុកោណកែង $(0<y<x<18)$ (0.25)

តាមសម្មតិកម្ម គេបាន

$$\begin{cases} 2(x+y) = 36 \\ x\cdot y = 72 \end{cases} \quad (0.25)$$

$$\begin{cases} x+y = 18 & (1) \\ x\cdot y = 72 & (2) \end{cases}$$

$(1): \ y = 18-x$

$(2): \ x(18-x) = 72$

$-x^2+18x-72=0$ (0.25)

$\Delta' = 81-72 = 9$

$x_1 = \frac{-9-3}{-1} = 12$ (0.25)

$x_2 = \frac{-9+3}{-1} = 6$ (0.25)

- ចំពោះ $x=12 \Rightarrow y=6$
- ចំពោះ $x=6 \Rightarrow y=12$

(មិនយកព្រោះ $x>y$)

សរុប៖ ចតុកោណកែងមាន

បណ្តោយ $x=12m$
ទទឹង $y=6m$ (0.25)

២. (1.50 ពិន្ទុ)

+ គណនា z_1+z_2

$z_1+z_2 = 3+2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+(-3+2i\sqrt{3})$

$= 1-i\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$ (0.25)

$z_1+z_2 = 1+\sqrt{3}i$ (0.25)

+ សរសេរ z_1+z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$z_1+z_2 = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ (0.25)

$z_1+z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ (0.25)

+ សរសេរ $\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^{36}$ ជាទម្រង់ពិជគណិត

$\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^{36} = \left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{36}$ (0.25)

$= \cos\frac{36\pi}{3}+i\sin\frac{36\pi}{3}$

$= \cos 12\pi + i\sin 12\pi$

ដូច្នេះ: $\left(\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)^2 = 1+0.i$ (0.25)

៣. (2.00 ពិន្ទុ)

- រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A
- ចំនួនករណីអាច

$n(S)=C(12,4)$

$= \dfrac{12!}{8!\times 4!} = \dfrac{12\times 11\times 10\times 9}{4\times 3\times 2\times 1}$

$n(S)=11\times 5\times 9 = 495$ (0.25)

. ចំនួនករណីស្រប

$n(A) = C(7,4) = \dfrac{7!}{4!\times 3!}$

$= \dfrac{7\times 6\times 5}{3\times 2}$ (0.25)

$n(A) = 35$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{35}{495} = \dfrac{7}{99}$ (0.25)

$P(A) = \dfrac{7}{99}$ (0.25)

+ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B

- ដោយក្រុមមានសមាជិក 4នាក់ ហើយគេចង់បានចំនួនសមាជិកភេទស្រីស្មើពាក់កណ្ដាលចំនួនសមាជិកក្រុមនោះ ក្រុមត្រូវមានសមាជិកស្រី 2 នាក់ និងប្រុស 2 នាក់

. ចំនួនករណីស្រប

$n(B) = C(7,2)\times C(5,2)$ (0.25)

$= \dfrac{7!}{5!\times 2!}\times\dfrac{5!}{3!\times 2!}$

$= \dfrac{7\times 6}{2}\times\dfrac{5\times 4}{2}$

$n(B) = 210$ (0.25)

ប្រូបាប $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{210}{495}$ (0.25)

$P(B) = \dfrac{14}{33}$ (0.25)

៤. (3.00 ពិន្ទុ)

ក. $I = \int_0^3 (2x+1)(x+3)\,dx$.

$= \int_0^3 (2x^2+7x+3)\,dx$ (0.25)

$= \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 3x\right)\Big|_0^3$ (0.25)

$= \left(\frac{2}{3}\times 3^3 + \frac{7}{2}\times 3^2 + 3\times 3\right) - (0)$ (0.25)

$I = \dfrac{117}{2}$ (0.25)

ខ. $\int_0^{\pi/4} \dfrac{\sin^2 2x}{4}\,dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} \sin^2 2x\,dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} \dfrac{1-\cos 4x}{2}\,dx$ (0.25)

$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/4} (1-\cos 4x)\,dx$

$= \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\pi/4}$ (0.25)

$= \frac{1}{8}\left(\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin 4\times\frac{\pi}{4}\right] - \left(0 - \frac{1}{4}\sin 0\right)\right)$ (0.25)

$J = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{32}$ (0.25)

(៧)

ក. $k=\int_{-6}^{6}2xe^{x^2}dx$

$=\int_{-6}^{6}(x^2)'e^{x^2}dx$ (0.25)

$=(e^{x^2})\Big|_{-6}^{6}$ (0.25)

$=e^{6^2}-e^{(-6)^2}$ (0.25)

$k=e^{6^2}-e^{6^2}=0$ (0.25)

៥. (6.00ពិន្ទុ)

ក. (1.50ពិន្ទុ)

- បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\frac{\ln x}{x}$

គេមាន $f(x)=\frac{x^2+x-\ln x}{x}$

$=\frac{x^2}{x}-\frac{\ln x}{x}+\frac{x}{x}$ (0.25)

$\Rightarrow f(x)=x+1-\frac{\ln x}{x}$ (0.25)

គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$

• $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x+1-\frac{\ln x}{x})$

ដោយ $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x=0$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{x}=-\infty$ (0.25)

នោះ $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ (0.25)

• $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1-\frac{\ln x}{x})$

ដោយ $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ (0.25)

នោះ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (0.25)

ខ. (1.00ពិន្ទុ)

បង្ហាញថា $f'(x)=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$

$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}$ (0.50)

$f'(x)=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$ (0.50)

$\forall x\in(0,+\infty)$

គ. (1.50ពិន្ទុ)

+ សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

គេមាន $x^2>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x^2-1+\ln x$ ចំពោះ $\forall x\in(0,+\infty)$ (0.25)

គេមានករណីដូចខាងក្រោម

ករណី $0<x<1$

តាមតម្លៃនេះ $x^2-1+\ln x<0$

$\Rightarrow f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(0,1)$ (0.25)

• ករណី $x=1\Rightarrow f'(1)=\frac{1-1+\ln 1}{1^2}=0$ (0.25)

• ករណី $x>1$

គេបាន $x^2>1\Rightarrow x^2-1>0$

$x>1\Rightarrow \ln x>\ln 1=0$

គេទាញបាន $x^2-1+\ln x>0$ (0.25)

ហើយ $f'(x)>0$ ចំពោះ $x>1$

ដូច្នេះ $f'(x)<0$ ចំពោះ $0<x<1$

$f'(x)=0$

$f'(x)>0$ ចំពោះ $x>1$

ចម្លើយទី២

សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

តាង $g(x) = x^2 - 1 + \ln x \ , x > 0$

$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0 \ , \forall x > 0$ (0.25)

$g(1) = 0$ (0.25)

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$\vert$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$ (0.25)
$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$	$-$	0	$+$

ដូចនេះ៖ $f'(x) < 0$ ចំពោះ $0 < x < 1$

$f'(1) = 0$

$f'(x) > 0 \ , \forall x > 1$

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

ចំពោះ $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2$ (0.25)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$ (0.25)
$f(x)$	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$

ឃ. បង្ហាញថា $\Delta : y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទេរនៃក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

គេមាន

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x\to+\infty} \left(x + 1 - \frac{\ln x}{x} - (x+1)\right)$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (0.25)$$

ដូចនេះ៖ បន្ទាត់ $\Delta : y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទេរនៃក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

- សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ Δ

គេមានផលដក $d(x) = f(x) - (x+1)$

$d(x) = -\frac{\ln x}{x}$ មានសញ្ញាដូច $-\ln x$, $x > 0$

គេបានតារាង

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$	$+$	0	$-$
$d(x)$	$+$	0	$-$ (0.25)

គេទាញបាន

+ $d(x) > 0$ ចំពោះ $0 < x < 1$
⇒ ក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ Δ ចំពោះ $0 < x < 1$ (0.25)

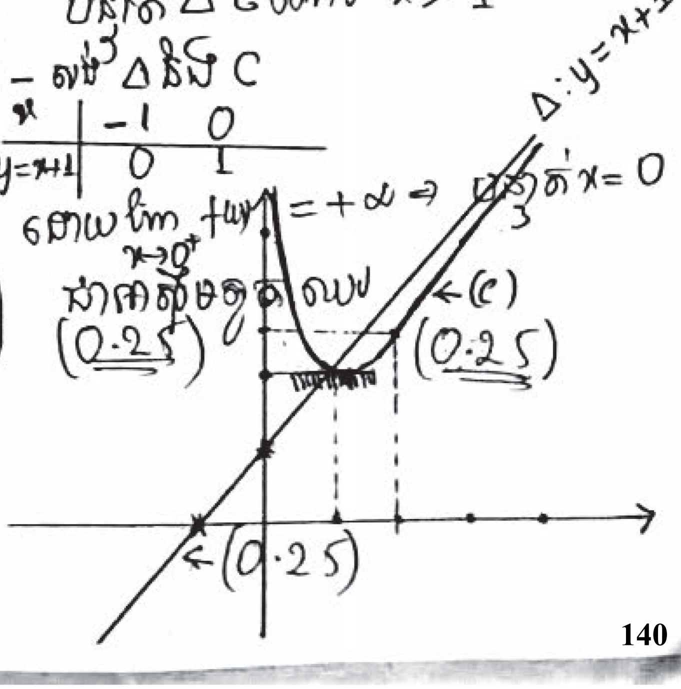
+ $d(x) = 0$ ចំពោះ $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2$
⇒ ក្រាប C កាត់បន្ទាត់ Δ ត្រង់ចំណុច $(1, 2)$ (0.25)

+ $d(x) < 0$ ចំពោះ $x > 1$ (0.25)
⇒ ក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ Δ ចំពោះ $x > 1$

- សង់ Δ និង C

x	-1	0
$y=x+1$	0	1

ដោយ $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ (0.25)



LIKE US ON FACEBOOK - Sok Piseth Page
facebook.com/TeacherSokPiseth

③

II - ធរណីមាត្រ

១. (១ពិន្ទុ)

- ទាញរកវ៉ិចទ័រ $\vec{AD}$ និង $\vec{BC}$

គេមាន

$\vec{AD}=(5-4,4-3,3-2)$ (0.25)

$\vec{AD}=(1,1,1)$ (0.25)

$\vec{BC}=(7-6,6-5,4-3)$ (0.25)

$\vec{BC}=(1,1,1)$ (0.25)

+ បង្ហាញថា ABCD ជាប្រលេឡូក្រាម

ដោយ $\vec{AD}=(1,1,1)$ និង $\vec{BC}=(1,1,1)$

$\Rightarrow \vec{AD}=\vec{BC}$ (0.50)

$\Rightarrow$ ABCD ជាប្រលេឡូក្រាម (0.50)

២ (4.00 ពិន្ទុ)

- បង្ហាញថាសមីការជាសមីការអ៊ីពែបូល

គេមាន $\left(\frac{2y-3x}{18}\right)\left(\frac{2y+3x}{2}\right)=1$

$\frac{4y^2-9x^2}{36}=1$ (0.25)

$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$ (0.25)

មានទម្រង់ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

ដូចនេះសមីការនេះជាអ៊ីពែបូលដែលមានអ័ក្សទទឹងនៅលើអ័ក្សអរដោនេ (0.25)

- ទាញរកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ នៃអ៊ីពែបូល

អ៊ីពែបូល $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$ មាន (0.25)

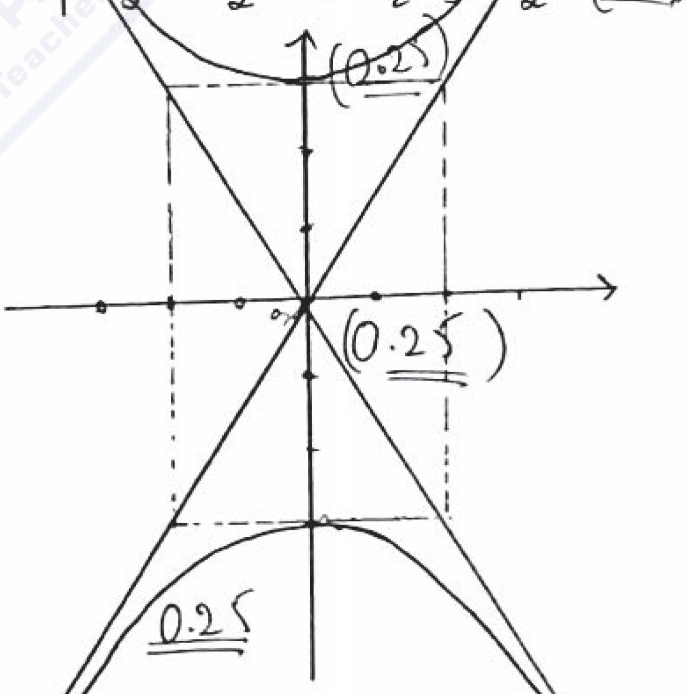
$a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$ (0.25)

កំពូល $V_1(0,-3)$ (0.25), $V_2(0,3)$ (0.25)

កំណុំ $F_1(0,-\sqrt{13})$ (0.25), $F_2(0,\sqrt{13})$ (0.25)

- ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ

$d_1: y=-\frac{3}{2}x$ (0.50) $d_2: y=\frac{3}{2}x$ (0.50)



ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ :..............................

បន្ទប់លេខ:.....................

តុលេខ:..........................

ហត្ថលេខា:

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ
ឆា.មប

សម័យប្រឡង៖ ថ្ងៃទី៤ ខែ វិច្ឆិកា ឆ្នាំ ២០១៨

វិញ្ញាសា: **គណិតវិទ្យា** (ឯកទេសទី២)

រយៈពេល: ២ម៉ោង

ប្រធាន:

I.ពីជគណិត

១.គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖ (កន្លះពិន្ទុ)

ក. $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$ ខ. $f(x)=\ln\cos x$

២. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖ (មួយពិន្ទុ)

ក. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{\sin 3x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

៣. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖ (កន្លះពិន្ទុ)

ក. $\int_1^2(\dfrac{x^2-1}{x^2}\ln x)dx$ ខ. $\int_0^1(x^3-x^2+4x+\dfrac{1}{x+1})dx$

៤.ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖ (មួយពិន្ទុ)

ក. $2e^{2x}-9e^x+7=0$ ខ. $\log_3{}^2 x-3\log_3 x=\log_3 x^2-4$

៥.គេមានអនុគមន៍ $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល$|f(x)|\le 1$ ចំពោះ $\forall x\in[0,1]$ ។

ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $f'(0)\le 8$ ។ (មួយពិន្ទុ)

៦.គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$ និង ប៉ារ៉ាបូល $y_1=2x^2+a$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃa ដើម្បីឱ្យប៉ារ៉ាបូល y_1 ប៉ះខ្សែកោង(C)នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ (ពីរពិន្ទុ)

II.ធរណីមាត្រ

ប៉ារ៉ាបូល(P) មានកំពូលនៅត្រង់គល់O នៃអ័ក្សកូអរដោនេ និងមានអ័ក្សអាប់ស៊ីស $\overrightarrow{x'x}$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ។

ក.ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស(Δ) និងសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល(P)ដោយដឹងថាក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូលនេះកាត់តាមចំណុច $A(2,-2\sqrt{2})$ ។ (ពីរពិន្ទុ)

ខ.បន្ទាត់(d_1)កាត់តាមចំណុច $B(2,0)$ហើយស្របនឹងបន្ទាត់(d_2)ដែលមានសមីការ: $2x+y-1=0$ និងកាត់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល(P)ត្រង់ពីរចំណុចM និង N ។ចូររកចំណុចM និង N ។ (ពីរពិន្ទុ)

LIKE US ON FACEBOOK Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth

សម្រាប់កំណែវិញ្ញាសាប្រឡងជ្រើសរើស
និស្សិតគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន
សាកល្បងទី២
វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

I. គណិតវិទ្យា

១. (0.50 ពិន្ទុ) គណនាដេរីវេ

ក. $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{(1+\sqrt{x})'}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}=\frac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$$ (0.25)

ខ. $f(x)=\ln\cos x$

$$f'(x)=\frac{(\cos x)'}{\cos x}=\frac{-\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x)=-\tan x$$ (0.25)

២. (1.00 ពិន្ទុ) គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{\sin 3x}$:(មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

គេបាន $\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{\sin 3x}=\frac{\sin x-\tan\frac{\pi}{3}\cdot\cos x}{\sin 3x}$

$$=\frac{\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x}{\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin 3x}$$ ①

$$=\frac{2\sin(x-\frac{\pi}{3})}{\sin 3x}$$ (0.25)

តាង $t=x-\frac{\pi}{3}\to x=t+\frac{\pi}{3}$

កាលណា $x\to\frac{\pi}{3}\Rightarrow t\to 0$

គេបាន

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{\sin 3x}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin t}{\sin 3(t+\frac{\pi}{3})}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin t}{\sin(\pi+3t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin t}{-\sin 3t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\left(\frac{\sin t}{t}\right)\times t}{-\left(\frac{\sin 3t}{3t}\right)\times 3t}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{\sin 3x}=-\frac{2}{3}$$ (0.25)

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ (រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

គេបាន

$$(1+x)(1+2x)(1+3x)-1=(2x^2+3x+1)(1+3x)-1$$

$$=2x^2+6x^3+3x+9x^2+1+3x-1$$

$$=6x^3+11x^2+6x$$ (0.25)

$$=x(6x^2+11x+6)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(6x^2+11x+6)}{x}=6$$ (0.25)

ដូចនេះ: $\lim\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{\dots}=6$

LIKE US ON FACEBOOK
Sok Piseth Page
Facebook.com/TeacherSokPiseth

៣. (0.50)ពិន្ទុ.

គណនាអាំងតេក្រាល

ក. $\int_1^2 \left(\frac{x^2-1}{x^2}\ln x\right)dx$

តាង $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = \frac{x^2-1}{x^2}dx \Rightarrow v = x + \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\Rightarrow \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}\ln x\,dx = \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}dx$

$= \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$= \left[\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x - x + \frac{1}{x}\right]_1^2$

$= \left(2+\frac{1}{2}\right)\ln 2 - 2 + \frac{1}{2}\big) - (0)$

$\boxed{\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}\ln x\,dx = \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}}$ (0.25)

ខ. $\int_0^1 \left(x^3 - x^2 + 4x + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \ln|x+1|\right)\Big|_0^1$

$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 2 + \ln 2\right) - (0)$

$= \frac{23}{12} + \ln 2$

ចម្លើយ: ~~ln~~

$\boxed{\int_0^1 \left(x^3 - x^2 + 4x + \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{23}{12} + \ln 2}$

(0.25)

៤. (1.00ពិន្ទុ):

ដោះស្រាយសមីការ.

ក. $2e^{2x} - 9e^x + 7 = 0$

តាង $S = e^x$ ដែល $S > 0$

គេបាន $2S^2 - 9S + 7 = 0$

$S_1 = 1,\ S_2 = \frac{c}{a} = \frac{7}{2}$

• ចំពោះ

$S = 1 \Leftrightarrow e^x = 1$

$x = 0$ 0.25

• ចំពោះ $S = \frac{7}{2} \Leftrightarrow e^x = \frac{7}{2}$

$x = \ln\frac{7}{2}$ 0.25

$\boxed{\text{ចម្លើយ: } x = 0,\ x = \ln\frac{7}{2}}$

ខ. $\log_3^2 x - 3\log_3 x = \log_3 x^2 - 4$

សមីការមានលក្ខខណ្ឌ $x > 0$.

គេបាន

$(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 4 = 0$

តាង $t = \log_3 x$ ដែល $t \in \mathbb{R}$ (0.25)

គេបាន $t^2 - 5t + 4 = 0$

$t_1 = 1,\ t_2 = 4$

ចំពោះ

$t = 1 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$

ចំពោះ: $t = 4 \Leftrightarrow \log_3 x = 4 \Rightarrow x = 3^4 = 81$

$\boxed{\text{ចម្លើយ: } x = 3,\ x = 81}$ 0.25

៤ . (1.00ពិន្ទុ)

ស្រាយបំភ្លឺថា : $f'(0)\leq 8$

គេមាន $f(x)=ax^2+bx+c$

$f'(x)=2ax+b$

$f'(0)=2a\times 0+b=b$

តាមសម្មតិកម្ម $|f(x)|\leq 1,\ \forall x\in[0,1]$

គេអាចសរសេរជាចំពោះករណីខាងក្រោម

• ចំពោះ $x=0$ គេបាន

$|f(0)=c|\leq 1$

$|c|\leq 1$

$-1\leq c\leq 1 \Rightarrow -1\leq -c\leq 1$

$\Rightarrow -3\leq -3c\leq 3$

$\Rightarrow -3c\leq 3$ (1) (0.25)

• ចំពោះ $x=\frac{1}{2}$ គេបាន $|f(\frac{1}{2})|\leq 1$

$|\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c|\leq 1$

$-1\leq \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\leq 1$

$-4\leq a+2b+4c\leq 4$

$a+2b+4c\leq 4$ (2) (0.25)

• ចំពោះ $x=1$ គេបាន $|f(1)|\leq 1$

$|a+b+c|\leq 1$

$-1\leq a+b+c\leq 1$

$-1\leq -a-b-c\leq 1$

$-a-b-c\leq +1$ (3) (0.25)

ដោយបូក (1), (2) និង (3) គេបាន

$-3c+a+2b+4c-a-b-c<3+4+1$

$b\leq 8$

តែ $f'(0)=b$

សរុប៖ $f'(0)\leq 8$ (0.25)

៦ . (2.00ពិន្ទុ)

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យគេហ្វប៉ារ៉ាបូល ប៉ះនឹងក្រាប C

$C: y=f(x)=\frac{2x^2-x+1}{x-1}$

$P: y=2x^2+a$

តាង $M(x,y)$ ជាចំណុចប៉ះរវាងក្រាប C និងប៉ារ៉ាបូល P

គេបានអាប់ស៊ីស x នៃ M ជាឫសនៃប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\frac{2x^2-x+1}{x-1}=2x^2+a & (1)\\ \left(\frac{2x^2-x+1}{x-1}\right)'=\left(2x^2+a\right)' & (2)\end{cases}$$ (0.25)

$(2): \frac{(4x-1)(x-1)-(2x^2-x+1)}{(x-1)^2}=4x$

$\frac{4x^2-4x-x+1-2x^2+x-1}{(x-1)^2}=4x$ (0.25)

$2x^2-4x=4x(x-1)^2$

$2x^2-4x=4x^3-8x^2+4x$