គណិតវិទ្យា

១១

ភាគ១

រៀបរៀងដោយ សុខ ពិសិដ្ឋ

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី

អារម្ភកថា

សួស្តីលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងប្រិយមិត្តអ្នកអានទាំងអស់ជាទីមេត្រី !

ស្បៀវភៅ **គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១១ ភាគ១** ដែលលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និង ប្រិយមិត្តកំពុងអាននេះ ខ្ញុំបាទរៀបចំឡើងក្នុងគោលបំណង ជួយសម្រួលក្នុងការបង្រៀនសម្រាប់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ដែលមិនមានពេលវេលាគ្រប់គ្រាន់ក្នុងការរៀបចំមេរៀនដើម្បីបង្រៀនសិស្ស និងសម្រាប់ ប្អូនៗសិស្សានុសិស្សដែលស្វ័យសិក្សាស្រាវជ្រាវ។ ក្នុងសៀវភៅនេះខ្ញុំបានរៀបចំយ៉ាងលំអិតនូវមេរៀននីមួយ រួមមាន ៖

- ☞ គន្លឹះដោះស្រាយ
- ☞ លំហាត់គំរូ
- ☞ លំហាត់អនុវត្តន៍ និង លំហាត់ជ្រើសរើសផ្សេងៗ

ខ្ញុំបាទសូមអភ័យទោស នូវរាល់កំហុសទាំងឡាយដែលកើតឡើងដោយអចេតនាក្តី ដោយការពិនិត្យមិនបានសព្វគ្រប់ជ្រុងជ្រោយក្តី ឬ ដោយបច្ចេកទេសកុំព្យូទ័រក្តី ខ្ញុំបាទរង់ចាំទទួលនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងប្រិយមិត្តអ្នកអានទាំងអស់ដោយក្តីសោមនស្សរីករាយ។

សូមជូនពរ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងប្រិយមិត្តអ្នកអានទទួលបានជោគជ័យគ្រប់ភារកិច្ច និង ការសិក្សា។

កំពង់ត្របែក ថ្ងៃទី ០២ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ២០១៣

អ្នករៀបរៀង

សុខ ពិសិដ្ឋ

លេខទូរស័ព្ទ : **016 510 532**

មាតិការ

មេរៀនទី ១ ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត

១. និយមន័យ

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតគឺជា អនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពី $\mathbb{N}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។

គេកំណត់សរសេរស្វ៊ីតដោយ (a_n) ឬ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ឬ $\{a_n\}$: $a_n = f(n)$ ។

ឧទាហរណ៍៖ ស្វ៊ីតខាងក្រោមនេះ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត:

$$a_n = n^2\ ,\quad b_n = \frac{n}{n+1},\quad c_n = \sqrt{\ln n}\ ,\quad u_n = \frac{e^n}{n}$$ ។

សម្គាល់:

- គ្រប់ធាតុនៅក្នុងចន្លោះ $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ ហៅថាតួនៃស្វ៊ីត ដែល a_1 ហៅថាតួទី១, a_2 ហៅថាតួទី២ ,..., a_n ហៅថាតួទី n ។
- ស្វ៊ីតដែលមានតួរាប់អស់ ហៅថា ស្វ៊ីតរាប់អស់ (ស្វ៊ីតកំណត់)។
- ស្វ៊ីតដែលមានតួរាប់មិនអស់ ហៅថាស្វ៊ីតអនន្តតួ(ស្វ៊ីតមិនកំណត់)

ឧទាហរណ៍ : $(a_n): 1,2,3,4,5,6,7$ ជាស្វ៊ីតរាប់អស់ ឬ ស្វ៊ីតកំណត់។

$(a_n): 1,3,9,\ldots,19683$ ជាស្វ៊ីតរាប់អស់ ឬ ស្វ៊ីតកំណត់។

$(a_n): 5,10,15,20,25,\ldots$ ជាស្វ៊ីតអនន្តតួ ឬ ស្វ៊ីតមិនកំណត់។

លំហាត់គំរូទី១ : បំពេញតួនៃស្វ៊ីតខាងក្រោមឱ្យបានបីតួទៀត:

ក. $3, 5, 7, 9, \ldots$

ខ. $1, 3, 6, 10, \ldots$

គ. $3, 8, 15, \ldots$

ឃ. $2, 4, 8, 16, \ldots$

ង. $1, 8, 27, 64, \ldots$

ច. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

ឆ. $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$

ជ. $-1, \frac{1}{2}, -3, \frac{1}{4}, -5, \ldots$

ឈ. $9, 6, 3, \ldots$

ញ. $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \ldots$

ដំណោះស្រាយ

ក. $3, 5, 7, 9, \ldots$

$a_1 = 3$

$a_2 = 5 = 3 + 2$

$a_3 = 7 = 5 + 2$

$a_4 = 9 = 7 + 2$

$\Rightarrow a_5 = a_4 + 2 = 9 + 2 = 11$

$\Rightarrow a_6 = a_5 + 2 = 11 + 2 = 13$

$\Rightarrow a_7 = a_6 + 2 = 13 + 2 = 15$

ដូចនេះ បីតួបន្ទាប់គឺ $\boxed{\mathbf{11, 13, 15}}$

ខ. $1, 3, 6, 10, \ldots$

$a_1 = 1$

$a_2 = 3 = a_1 + 2$

$a_3 = 6 = a_2 + 3$

$a_4 = 10 = a_3 + 4$

$\Rightarrow a_5 = a_4 + 5 = 10 + 5 = 15$

$\Rightarrow a_6 = a_5 + 6 = 15 + 6 = 21$

$\Rightarrow a_7 = a_6 + 7 = 21 + 7 = 28$

ដូចនេះ បីតួបន្ទាប់គឺ $\boxed{\mathbf{15\,,21\,,28}}$

គ. $3,8,15,\ldots$

$a_1 = 3 = 2^2 - 1$

$a_2 = 8 = 3^2 - 1$

$a_3 = 15 = 4^2 - 1$

$\Rightarrow a_4 = 5^2 - 1 = 24$

$\Rightarrow a_5 = 6^2 - 1 = 35$

$\Rightarrow a_6 = 7^2 - 1 = 48$

ដូចនេះ បីតួបន្ទាប់គឺ $\boxed{\mathbf{24\,,35\,,48}}$

ចម្លើយ ពី ឃ ដល់ ញ

ឃ. $32,64,128$ ង. $125,216,343$

ច. $21,34,55$ ឆ. $6,-7,8$

ជ. $\frac{1}{6},7,\frac{1}{8}$ ឈ. $0,-3,-6$

ញ. $\frac{3}{2},\frac{11}{6},\frac{13}{6}$

លំហាត់គំរូទី២ : សរសេរគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតរាប់អស់ដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

ក. $a_n = \frac{1}{n+2}$ ដែល $1 \le n \le 4$

ខ. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ដែល $1 \le n \le 8$

គ. $a_n = 3n - 1$ ដែល $1 \le n \le 4$

ឃ. $a_n = 2^{-n+2}$ ដែល $1 \le n \le 5$

ច. $a_n = 2^n - 1$ ដែល $1 \le n \le 6$

ឆ. $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ ដែល $1 \le n \le 5$

ឃ. $a_n=\dfrac{n-4}{n(n+2)}$ ដែល $1\le n\le 4$

ដំណោះស្រាយ

ក. $a_n=\dfrac{1}{n+2}$ ដែល $1\le n\le 4$

ជំនួស $n=1,2,3,4$ យើងបាន៖

$$a_1=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$$

$$a_2=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

$$a_3=\frac{1}{3+2}=\frac{1}{5}$$

$$a_4=\frac{1}{4+2}=\frac{1}{6}$$

ដូចនេះ បួនតួដែលត្រូវកំណត់គឺ $\boxed{\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{6}}$

ខ. $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ ដែល $1\le n\le 8$

ជំនួស $n=1,2,3,4,5,6,7,8$ យើងបាន៖

$$a_1=\frac{(-1)^1}{1}=-1 \qquad a_5=\frac{(-1)^5}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$a_2=\frac{(-1)^2}{2}=-\frac{1}{2} \qquad a_6=\frac{(-1)^6}{6}=\frac{1}{6}$$

$$a_3=\frac{(-1)^3}{3}=-\frac{1}{3} \qquad a_7=\frac{(-1)^7}{7}=-\frac{1}{7}$$

$$a_4=\frac{(-1)^4}{4}=\frac{1}{4} \qquad a_8=\frac{(-1)^8}{8}=\frac{1}{8}$$

ដូចនេះ ៨តួនៃស៊ីតគឺ $\boxed{-1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{6},-\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{8}}$

គ. $a_n = 3n-1$ ដែល $1 \le n \le 5$

ជំនួស $n = 1, 2, 3, 4, 5$ យើងបាន៖

$$a_1 = 3\cdot 1 - 1 = 2$$
$$a_2 = 3\cdot 2 - 1 = 5$$
$$a_3 = 3\cdot 3 - 1 = 8$$
$$a_4 = 3\cdot 4 - 1 = 11$$
$$a_5 = 3\cdot 5 - 1 = 14$$

ដូចនេះ ប្រាំតួនៃស្វ៊ីតគឺ $\boxed{2, 5, 8, 11, 14}$

ចម្លើយពី ឃ ដល់ ជ

ឃ. $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

ង. $-1, 1, -1, 1$

ច. $1, 3, 7, 15, 31, 63$

ឆ. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}$

ជ. $-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{15}, 0, \frac{1}{35}$ ។

លំហាត់គំរូទី៣ : សរសេរតួនៃស្វ៊ីតលំដាប់តគ្នា៖

ក. $a_n = 2 + \frac{1}{2^n} \ , n \in \mathbb{N}$

ខ. $a_n = 2n + 3 \ , n \in \mathbb{N}$

គ. $a_n = 2^n \ , n = 1, 2, 3, \ldots$

ឃ. $a_n = \frac{1}{2n-1} \ , n \in \mathbb{N}$

ង. $a_n = \frac{2n-1}{2n+1} \ , n \in \mathbb{N}$

ច. $a_n = \frac{1}{2n}$

ឆ. $a_n = \frac{n}{2^n} \ , n \in \mathbb{N}$

ជ. $a_n = \frac{n}{n^2+1} \ , n \in \mathbb{N}$

ឈ. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ , n \in \mathbb{N}$

ញ. $a_n = e^n \ , n \in \mathbb{N}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $a_n = 2 + \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n+1}+1}{2^n}$

ជំនួស $n=1,2,3,\ldots$ យើងបាន:

$$a_1=\frac{2^2+1}{2}=\frac{5}{2}$$

$$a_2=\frac{2^3+1}{2^2}=\frac{9}{4}$$

$$a_3=\frac{2^4+1}{2^3}=\frac{17}{8}$$

$$a_4=\frac{2^5+1}{2^4}=\frac{33}{16}$$

....

ដូចនេះ $\boxed{(a_n):\frac{5}{2},\frac{9}{4},\frac{17}{8},\frac{33}{16},\ldots,2^n+\frac{1}{2^n},\ldots}$ ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$

ខ. $a_n=2n+3$

ជំនួស $n=1,2,3,\ldots$ យើងបាន:

$$a_1=2\cdot1+3=5$$

$$a_2=2\cdot2+3=7$$

$$a_3=2\cdot3+3=9$$

$$a_4=2\cdot4+3=11$$

....

ដូចនេះ $\boxed{(a_n):5,7,9,11,\ldots,2n+3,\ldots}$ ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$

គ. $a_n=2^n$

ជំនួស $n=1,2,3,4,\ldots$ យើងបាន:

$a_1=2^1=1$ $\quad$ $a_2=2^2=4$

$a_3=2^3=8$ $\quad$ $a_4=2^4=16$

....

ដូចនេះ $\boxed{(a_n):2,4,8,16,\ldots,2^n,\ldots}$ ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$

ចម្លើយ ពី ឃ ដល់ ញ

ឃ. $(a_n): 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2n-1}, \dots$

ង. $(a_n): \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \dots, \frac{2n-1}{2n+1}, \dots$

ច. $(a_n): \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots$

ឆ. $(a_n): \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \dots, \frac{n}{2^n}, \dots$

ជ. $(a_n): \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \dots, \frac{n}{n^2+1}, \dots$

ឈ. $(a_n): 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots$

ញ. $(a_n): e, e^2, e^3, e^4, \dots, e^n, \dots$

២. តួទី n នៃស្វ៊ីត

ឧទាហរណ៍: គេឱ្យស្វ៊ីត $(a_n): 3, 9, 27, 81, 243$ ដែល $n \in \mathbb{N}$

យើងសង្កេតឃើញថា: $a_1 = 3 = 3^1$

$a_2 = 9 = 3^2$

$a_3 = 27 = 3^3$

$a_4 = 81 = 3^4$

$a_5 = 243 = 3^5$

....

$\Rightarrow a_n = 3^n$

យើងបាន 3^n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

គេសរសេរ $a_n = 3^n$ ហៅថាតួទី n (ឬតួទូទៅ)នៃស្វ៊ីត។

លំហាត់គំរូទី១ : កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $a_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{2^1}$

$a_2=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$

$a_3=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$

$a_4=\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$

....

$\Rightarrow a_n=\frac{1}{2^n}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $\boxed{a_n=2^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

លំហាត់គំរូទី២ : កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $2,5,10,17,\dots$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន់: $a_1=2=1^2+1$

$a_2=5=2^2+1$

$a_3=10=3^2+1$

$a_4=17=4^2+1$

....

$\Rightarrow a_n=n^2+1$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $\boxed{a_n=n^2+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

លំហាត់គំរូទី៣ : កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត: $-1,2,7,14,23,$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $a_1=-1=1^2-2$

$a_2 = 2 = 2^2 - 2$

$a_3 = 7 = 3^2 - 2$

$a_4 = 14 = 4^2 - 2$

$a_5 = 23 = 5^2 - 2$

....

$\Rightarrow a_n = n^2 - 2$

ដូចនេះ តួទី n នៃស៊ីតគឺ $\boxed{a_n = n^2 - 2}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

លំហាត់គំរូទី៤ : កំណត់តួទី n នៃស៊ីតៈ $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានៈ $a_1 = \frac{2}{3} = \frac{1+1}{1+2}$

$a_2 = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2+2}$

$a_3 = \frac{4}{5} = \frac{3+1}{3+2}$

$a_4 = \frac{5}{6} = \frac{4+1}{4+2}$

....

$\Rightarrow a_n = \frac{n+1}{n+2}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស៊ីតគឺ $\boxed{a_n = \frac{n+1}{n+2}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

កំណត់តួទី n ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ នៃស៊ីតខាងក្រោមៈ

ក. $-3, -5, -7, -9, \ldots$ ខ. $-3, -1, 1, 3, 5, \ldots$

គ. $16,13,10,7,4,\ldots$

ឃ. $5,7,9,11,13,\cdots$

ង. $\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{4}{7},\frac{5}{9},\ldots$

ច. $\frac{1}{3},\frac{3}{5},\frac{7}{9},\frac{15}{17},\frac{31}{33},\ldots$

ឆ. $-\frac{1}{3},\frac{1}{5},-\frac{1}{7},\frac{1}{9},\ldots$

ជ. $\frac{1}{3},\frac{1}{8},\frac{1}{15},\frac{1}{24},\ldots$

ឈ. $\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{3}{10},\frac{4}{17},\ldots$

ញ. $\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{9},\frac{4}{17},\ldots$

ដ. $-1,1,-1,1,\ldots$

ឋ. $1,\frac{1}{2},3,\frac{1}{4},5,\ldots$

ឌ. $1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\ldots$

ឍ. $\frac{3}{4},\frac{4}{9},\frac{5}{16},\frac{6}{25},\ldots$

ណ. $\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{20},\ldots$

ត. $\frac{1}{1\cdot 4},\frac{1}{4\cdot 7},\frac{1}{7\cdot 10},\frac{1}{10\cdot 13},\ldots$

ថ. $\frac{3}{2^2\cdot 3^2},\frac{5}{3^2\cdot 4^2},\frac{7}{4^2\cdot 5^2},\frac{9}{5^2\cdot 6^2},\ldots$

ទ. $\frac{3}{4},\left(\frac{6}{7}\right)^2,\left(\frac{9}{10}\right)^2,\left(\frac{12}{13}\right)^2\ldots$

៣. អថេរភាពនៃស្វ៊ីត

៣.១ ស្វ៊ីតកើន ស្វ៊ីតចុះ

ក. និយមន័យ

- ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតកើន លុះត្រាតែ $a_n \le a_{n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។
- ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះ លុះត្រាតែ $a_n \ge a_{n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។
- បើ $a_n < a_{n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ នោះ (a_n) ជាស្វ៊ីតកើនដាច់ខាត
- បើ $a_n \ge a_{n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ នោះ (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះដាច់ខាត។

ខ. របៀបសិក្សាអថេរភាពស្វ៊ីត

របៀបទី១: សិក្សាសញ្ញានៃផលដក $a_{n+1}-a_n$ ធៀបនឹង 0

- បើ $a_{n+1}-a_n \geq 0 \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ នោះ (a_n) ជាស៊ីតកើន
- បើ $a_{n+1}-a_n \leq 0 \Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ នោះ (a_n) ជាស៊ីតចុះ
- បើ $a_{n+1}-a_n > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ នោះ (a_n) ជាស៊ីតកើនដាច់ខាត
- បើ $a_{n+1}-a_n < 0 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ នោះ (a_n) ជាស៊ីចុះដាច់ខាត
- បើ $a_{n+1}-a_n = 0 \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ នោះ (a_n) ជាស៊ីតថេរ
- បើ $a_{n+1}-a_n$ មានសញ្ញាមិនថេរ $\forall n \in \mathbb{N}$ នោះ (a_n) មិនមែនជាស៊ីតកើន ហើយក៏មិនមែនជាស៊ីតចុះដែរ ។

លំហាត់គំរូទី១ : សិក្សាភាពកើន ឬ ចុះនៃស៊ីតខាងក្រោមៈ

ក. ស៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 5n+3$ ។

ខ. ស៊ីត $(a_n)_{n\geq 5}$ ដែល $a_n = \dfrac{3n}{2}$ ។

គ. ស៊ីត $(a_n)_{n\geq 3}$ ដែល $a_n = \dfrac{2}{n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. យើងមាន $a_n = 5n+3 \Rightarrow a_{n+1} = 5(n+1)+3 = 5n+8$

យើងបាន $a_{n+1}-a_n = (5n+8)-(5n+3) = 5 > 0$

$\Rightarrow a_{n+1} > a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ ស៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 5n+3$ ជាស៊ីតកើន

ខ. យើងមាន $a_n = \dfrac{3n}{2} \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{3(n+1)}{2} = \dfrac{3n}{2}+\dfrac{3}{2}$

យើងបាន $a_{n+1}-a_n = \left(\dfrac{3n}{2}+\dfrac{3}{2}\right)-\dfrac{3n}{2} = \dfrac{3}{2} > 0$

$\Rightarrow a_{n+1} > a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 5$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\ge5}$ ដែល $a_n=\dfrac{3n}{2}$ ជាស្វ៊ីតកើន

គ. យើងមាន $a_n=\dfrac{2}{n}\Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{2}{n+1}$

យើងបាន $a_{n+1}-a_n=\dfrac{2}{n+1}-\dfrac{2}{n}$

$$=\frac{2n-2n-2}{n(n+1)}$$

$$=-\frac{2}{n(n+1)}<0 \text{ ចំពោះគ្រប់ } n\ge3$$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត$(a_n)_{n\ge3}$ ដែល $a_n=\dfrac{2}{n}$ ជាស្វ៊ីតចុះ

លំហាត់គំរូទី២: សិក្សាភាពកើន ចុះ នៃស្វ៊ីតខាងក្រោមៈ

ក. $a_n=n^2-3n+2 \quad ,n\in\mathbb{N}$

ខ. $a_n=-n^2+7n-12 \quad ,n\ge3$

គ. $a_n=\dfrac{n^2-3n+6}{2} \quad ,n\in\mathbb{N}$

ដំណោះស្រាយ

ក. យើងមាន $a_n=n^2-3n+2\Rightarrow a_{n+1}=(n+1)^2-3(n+1)+2=n^2-n$

យើងបាន $a_{n+1}-a_n=(n^2-n)-(n^2-3n+2)$

$$=2n-2$$

$$=n(n-1)\ge0\,,\forall n\in\mathbb{N}$$

នោះ $a_{n+1}\ge a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត(a_n) ដែល $a_n=n^2-3n+2 \quad ,n\in\mathbb{N}$ ជាស្វ៊ីតកើន

ខ. យើងមាន $a_n=-n^2-7n-12$

$$\Rightarrow a_{n+1}=-(n+1)^2-7(n+1)-12=-n^2+5n-6$$

យើងបាន $a_{n+1}-a_n=(-n^2+5n-6)-(-n^2+7n-12)$

$$=-2(n-3)\le 0\,,\forall n\ge 3\,,n\in\mathbb{N}$$

នាំឱ្យ $a_{n+1}\le a_n$, $\forall n\ge 3$, $n\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $\left(a_n\right)_{n\ge 3}$ ដែល $a_n=-n^2+7n-12$ ជាស្វ៊ីតចុះ

គ. យើងមាន $a_n=\dfrac{n^2-3n+6}{2}$

$$\Rightarrow a_{n+1}=\frac{(n+1)^2-3(n+1)+6}{2}=\frac{n^2-n+4}{4}$$

យើងបាន $a_{n+1}-a_n=\dfrac{n^2-n+4}{2}-\dfrac{n^2-3n+6}{2}=n-1\ge 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow a_{n+1}\ge a_n\ ,\forall n\in\mathbb{N}$$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $\left(a_n\right)$ ដែល $a_n=\dfrac{n^2-3n+6}{2}$ ជាស្វ៊ីតកើន

លំហាត់គំរូទី២ : សិក្សាអថេរភាពនៃស្វ៊ីត$\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n=\left(-2\right)^n$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a_n=\left(-2\right)^n \Rightarrow a_{n+1}=\left(-2\right)^{n+1}=-2\cdot\left(-2\right)^n$

យើងបាន $a_{n+1}-a_n=-2\cdot(-2)^n-(-2)^n=-3\cdot(-2)^n$ មានសញ្ញាមិនថេរ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត$\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n=\left(-2\right)^n$ មិនមែនជាស្វ៊ីតកើន ហើយ ក៏មិនមែនជាស្វ៊ីតចុះដែរ

របៀបទី២ :

បើស្វ៊ីត $\left(a_n\right)$មានតួវិជ្ជមានដាច់ខាត គេប្រាប់ធៀប $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ ទៅនឹងចំនួន 1

- ស៊ីត(a_n) ជាស៊ីតកើនលុះត្រាតែ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។
- ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតចុះ លុះត្រាតែ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។
- បើ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ នោះ (a_n) ជាស៊ីតថេរ។

លំហាត់គំរូទី៣ : សិក្សាអថេរភាពនៃស៊ីត (a_n) ដូចខាងក្រោមៈ

ក. $a_n = 3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

ខ. $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

ដំណោះស្រាយ

ក. យើងមាន $a_n = 3^n \Rightarrow a_{n+1} = 3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$

យើងបាន $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3 \cdot 3^n}{3^n} = 3 > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

ដូចនេះ ស៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ជាស៊ីតកើន

ខ. យើងមាន $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \Rightarrow a_{n+1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} = \dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

យើងបាន $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n} = \dfrac{2}{3} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

ដូចនេះ ស៊ីត (a_n) ដែល $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ជាស៊ីតចុះ

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. បង្ហាញថា ស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n=\dfrac{1}{n+2}$ ជាស្វ៊ីតចុះ ។

២. បង្ហាញថា ស្វ៊ីត(a_n) ដែល $a_n=\dfrac{2n+1}{n+3}$ ជាស្វ៊ីតកើន។

៣. សិក្សាភាពកើន ចុះ នៃស្វ៊ីត(a_n) ដែល$a_n=\dfrac{3n-1}{2n+3}$, $n\in\mathbb{N}$ ។

៤. សិក្សាអថេរភាពនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម:

ក. $a_n=\dfrac{n}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$ ខ. $a_n=\dfrac{2n}{3n+1}$, $n\in\mathbb{N}$

គ. $a_n=\dfrac{1}{n^3}$, $n\in\mathbb{N}$ ឃ. $a_n=\dfrac{1}{2^n}$, $n\in\mathbb{N}$

ង. $a_n=-\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$ ច. $a_n=\dfrac{n-1}{n^2}$, $n=2,3,4,\dots$

៥. រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n=\dfrac{n+k}{n+1}$ ជាស្វ៊ីតកើន។

៦. បង្ហាញថាស្វ៊ីត(a_n) ដែល$a_n=\dfrac{3n}{4n-5}$ ជាស្វ៊ីតចុះ ចំពោះ $n=2,3,4,\dots$

៧. សិក្សាភាពកើន ចុះ នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម:

ក. $a_n=n^2-9n+20$, $n=4,5,6,\dots$

ខ. $a_n=\dfrac{n}{e^n}$, $n\in\mathbb{N}$

គ. $a_n=|c|^n$, $n\in\mathbb{N}$

ឃ. $a_n=5^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$

ង. $a_n=\left(3^n+4^n\right)^{\frac{1}{n}}$, $n\in\mathbb{N}$

៣.២. ស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

និយមន័យ ស្វ៊ីត(a_n)ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនលុះត្រាតែ $a_n \le a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (ឬ $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le a_{n+1} \le \ldots$) ឬ $a_n \ge a_{n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ (ឬ $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge a_{n+1} \ge \ldots$)។

សម្គាល់ :

- ស្វ៊ីតកើន ឬ ស្វ៊ីតចុះជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន។ ដូចនេះ ដើម្បីបង្ហាញថាស្វ៊ីត(a_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន យើងត្រូវបង្ហាញថា(a_n)ជាស្វ៊ីតកើន ឬ ស្វ៊ីតចុះ ។
- បើស្វ៊ីត (a_n)មិនមែនជាស្វ៊ីតកើន ឬ មិនមែនជាស្វ៊ីតចុះ នោះ (a_n) មិនមែនជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនទេ។
- **ស្វ៊ីតថេរ ក៏ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនដែរ**

លំហាត់គំរូទី១ : បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១

យើងមាន $a_n = \dfrac{1}{2^n} \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^n}$

យើងបាន $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \quad , \forall n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន(ចុះ)

របៀបទី២

យើងមាន $a_n = \dfrac{1}{2^n} \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^n}$

យើងបាន $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}=-\frac{1}{2^n}<0\ ,\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow a_{n+1}<a_n$ ($\left(a_n\right)$ ជាស្វ៊ីតចុះ)

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n=\frac{1}{2^n}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន(ចុះ)

លំហាត់គំរូទី២ : សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $a_n=\frac{2^n}{n}\ ,n\geq 1$

ខ. $a_n=\frac{4n}{n+1}\ ,n\in\mathbb{N}$

គ. $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\dots,(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$

ឃ. $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n}$

ដំណោះស្រាយ

ក. យើងមាន $a_n=\frac{2^n}{n}\ ,n\geq 1$

$$\Rightarrow a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1}=\frac{2\cdot 2^n}{n+1}$$

យើងបាន $\Rightarrow a_{n+1}-a_n=\frac{2\cdot 2^n}{n+1}-\frac{2^n}{n}$

$$=\frac{2n\cdot 2^n-n\cdot 2^n-2^n}{n(n+1)}$$

$$=\frac{(n-1)\cdot 2^n}{n(n+1)}\geq 0$$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

$\Rightarrow a_{n+1}\geq a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត$\left(a_n\right)$ ដែល $a_n=\frac{2^n}{n}\ ,n\geq 1$ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន(កើន)

ខ. យើងមាន $a_n=\dfrac{4n}{n+1}\ ,n\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow a_{n+1}=\frac{4(n+1)}{(n+1)+1}=\frac{4n+4}{n+2}$$

យើងបាន $a_{n+1}-a_n=\dfrac{4n+4}{n+2}-\dfrac{4n}{n+1}$

$$=\frac{4n^2+4n+4n+4-4n^2-8n}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{4}{(n+1)(n+2)}>0\ ,\forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_{n+1}>a_n\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

ដូចនេះ ស្ទីត (a_n) ដែល $a_n=\dfrac{4n}{n+1}\ ,n\in\mathbb{N}$ ជាស្ទីតម៉ូណូតូន(កើន)

គ. យើងមាន $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}$

$$\Rightarrow a_{n+1}=(-1)^{n+2}\cdot\frac{1}{n+1}=-(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$$

យើងបាន $a_{n+1}-a_n=-(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{n+1}-(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n}$

$$=(-1)^n\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$$

$=(-1)^n\cdot\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ មានសញ្ញាមិនថេរ $\forall n\in\mathbb{N}$

នោះ (a_n) មិនមែនជា ស្ទីតកើន ចុះ ឬ ថេរទេ

ដូចនេះ ស្ទីត $1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{4},\dots,(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}$ មិនមែនជាស្ទីតម៉ូណូតូនទេ

ឃ. $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dots,\dfrac{1}{n}$

យើងមាន $a_1=1,a_2=\dfrac{1}{2},a_3=\dfrac{1}{3},\dots,a_n=\dfrac{1}{n}$

នោះ $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$

ដូចនេះ ស៊ីត $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$ ជាស៊ីតម៉ូណូតូន(ចុះ)

របៀបម្យ៉ាងទៀត

យើងមាន $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

យើងបាន $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}) < 0$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$ ((a_n) ជាស៊ីចុះ)

ដូចនេះ ស៊ីត $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$ ជាស៊ីតម៉ូណូតូន(ចុះ)

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. សិក្សាភាពម៉ូណូតូន នៃស៊ីត(a_n) ដែលកំណត់ដូចខាងក្រោមៈ

ក. $a_n = \frac{2n+5}{n+1}$ ខ. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

គ. $a_n = 2^n \cdot 3^{n+1}$ ឃ. $a_n = (n-3)^2$, $n \geq 3$

ង. $a_n = 3 + (-1)^n$ ច. $a_n = \frac{1}{n^2}$

ឆ. $a_n = (-1)^n$ ជ. $a_1 = 1$ និង $a_{n+1} = a_n - 3$

២. បង្ហាញថា ស៊ីត(a_n) ដែល $a_n = \frac{\pi^n}{n}$ ជាស៊ីតម៉ូណូតូន។

៣. បង្ហាញថាស៊ីត(a_n) ដែល $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$ ជាស៊ីតម៉ូណូតូន

៤. ស្វ៊ីតទាល់

៤.១ ស្វ៊ីតទាល់លើ

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n=-n^2+1$

គេបាន $a_1=0\,, a_2=-3\,, a_3=-8\,, a_4=-15\,, \ldots, a_{100}=-9999\,, \ldots$

នោះ $0=a_1>a_2>a_3>a_4>\cdots$ ឬ $a_n\le 0$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

គេថា ស្វ៊ីតនេះ ជា**ស្វ៊ីតទាល់លើ** ។ 0 ហៅថា**គោលលើ**នៃស្វ៊ីតនេះ។

និយមន័យ	ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ លុះត្រាតែមានចំនួនពិត M មួយ ដែលចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n\le M$ ។ ចំនួន M នេះ ហៅថា **គោលលើនៃស្វ៊ីត** ។

លំហាត់គំរូទី១ : រកគោលលើនៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដូចខាងក្រោមៈ

ក. $a_n=2^{-n}\ \ ,n\in\mathbb{N}$

ខ. $a_n=\dfrac{2}{n}\ ,\ n\in\mathbb{N}$

គ. (a_n) ដែល $a_1=1$ និង $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2}$ បើ $n\ge 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. យើងមាន $a_n=2^{-n}=\dfrac{1}{2^n}$

យើងបាន $a_1=\dfrac{1}{2}\,,\ a_2=\dfrac{1}{4}\,,\ a_3=\dfrac{1}{8}\,,\ a_4=\dfrac{1}{16}\,,\ \ldots$

នោះ $\dfrac{1}{2}=a_1>a_2>a_3>a_4>\cdots$

$\Rightarrow a_n\le\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ គោលលើនៃស្វ៊ីតនេះគឺ $\boxed{M=\dfrac{1}{2}}$

ខ. យើងមាន $a_n = \frac{2}{n}$

យើងបាន $a_1 = 2\,,\ a_2 = 1\,,\ a_3 = \frac{2}{3}\,,\ a_4 = \frac{1}{2}\,,\ \ldots$

នោះ $2 = a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots$

$\Rightarrow a_n \le 2$

ដូចនេះ គោលលើនៃស៊ីតនេះគឺ $\boxed{M = 2}$

គ. យើងមាន $a_1 = 1\ ,\ a_n = \frac{a_{n-1}}{2}\,, n \ge 2$

យើងបាន $a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}\ ,\ a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{1}{4}\,, a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{1}{8}\,, \ldots$

នោះ $1 = a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots$

$\Rightarrow a_n \le 1$

ដូចនេះ គោលលើនៃស៊ីតនេះគឺ $\boxed{M = 1}$

៤. ២. ស៊ីតទាល់ក្រោម

ឧទាហរណ៍: គេឱ្យស៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 2^n + 1\ ,\quad n \in \mathbb{N}$ ។

គេបាន $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 9, a_4 = 17, \ldots$

នោះ $3 = a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \cdots$

$\Rightarrow a_n \ge 3\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$

ចំនួន 3 ហៅថា គោលក្រោមនៃស៊ីត។

និយមន័យ ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតទាល់ក្រោម លុះត្រាតែមានចំនួនពិត m មួយ ដែលចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \ge m$ ។ ចំនួន m នេះ ហៅថា **គោលក្រោមនៃស៊ីត** ។

លំហាត់គំរូទី២ : រកគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំណត់ដូចខាងក្រោមៈ

ក. $a_n = 4n-1 \ , \ n \in \mathbb{N}$

ខ. $a_n = n+2 \ , \ n \in \mathbb{N}$

គ. $a_n = 2n+1 \ , \ n \in \mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. យើងមាន $a_n = 4n-1 \ , \ n \in \mathbb{N}$

យើងបាន $a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 11, a_4 = 15, \ldots$

នោះ $3 = a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots$

$\Rightarrow a_n \geq 3 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ ចំនួនទាល់ក្រោមនៃស្វ៊ីតនេះគឺ $\boxed{m = 3}$

ខ. យើងមាន

$a_n = n+2 \ , n \in \mathbb{N}$

យើងបាន $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 5, a_4 = 6, \ldots$

នោះ $3 = a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots$

$\Rightarrow a_n \geq 3 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ ចំនួនទាល់ក្រោមនៃស្វ៊ីតនេះគឺ $\boxed{m = 3}$

គ . ចម្លើយ $m = 3$

៣.៣ ស្វ៊ីតទាល់

ឧទាហរណ៍: គេឱ្យស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

យើងបាន $a_1 = \dfrac{1}{2}, a_2 = \dfrac{2}{3}, a_3 = \dfrac{3}{4}, \ldots, a_{1000000} = \dfrac{1000000}{1000001} \approx 1, \ldots$

យើងឃើញថា $\dfrac{1}{2}$ ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត និង 1 ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត ព្រោះ

កាលណា តម្លៃ n កាន់តែធំ(n ខិតជិតអនន្ត) នោះ $\frac{n}{n+1}$ ខិតជិត1 ដែល1 ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត។ យើងបាន ស្វ៊ីតនេះ **ទាល់លើ**ផង និង**ទាល់ក្រោម**ផង។ គេថា ស្វ៊ីត(a_n) ជា**ស្វ៊ីតទាល់**។

និយមន័យ	ស្វ៊ីត(a_n)ជាស្វ៊ីតទាល់លុះត្រាតែ(a_n)ជាស្វ៊ីតទាល់ខាងលើ ផង និង ទាល់ខាងក្រោមផង គឺ $m \le a_n \le M$ ។

លំហាត់គំរូទី៣ : បង្ហាញថា ស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n = \frac{1}{n^2}$ ជាស្វ៊ីតទាល់។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a_n = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$

យើងបាន $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{9}$, $a_4 = \frac{1}{16}$, …

នោះ $1 = a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \cdots$

$\Rightarrow a_n \le 1$ ($M = 1$ ជាចំនួនទាល់លើ)

ម៉្យាងទៀត កាលណាតម្លៃnកាន់តែធំ($n \to \infty$) នោះ $a_n = \frac{1}{n^2}$ ខិតទៅរក0

$$(\mathrm{EX}:\ n = 100\,000\,000 \Rightarrow a_{100\,000\,000} = \frac{1}{10\,000\,000\,000\,000\,000} \approx 0\ )$$

នោះ $m = 0$ ជាចំនួនទាល់ក្រោម

យើងបាន $0 \le a_n \le 1$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត(a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ ដែលមាន$M = 1$ ជាចំនួនទាល់លើ និង $m = 0$ ជាចំនួនទាល់ក្រោម

លំហាត់គំរូទី៤ : បណ្តាស្វ៊ីតខាងក្រោម តើស្វ៊ីតណាខ្លះ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ ទាល់ក្រោម និង ជាស្វ៊ីតទាល់ ? រួចរកគោលនៃស្វ៊ីតនីមួយៗ ។

ក. ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 1-3n$

ខ. ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{\pi}{n}$

គ. ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{3^n}{n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. យើងមាន $a_n = 1-3n$

យើងបាន $a_1 = -2 , a_2 = -5 , a_3 = -8 , a_4 = -11 , \ldots$

នោះ $-2 = a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \cdots \quad \Rightarrow a_n \le -2$

$\Rightarrow$ ចំនួន $M = -2$ ជាចំនួនទាល់លើ

ម្យ៉ាងទៀត កាលណា $n \to \infty$ នោះ $a_n = 1-3n \to -\infty$ (មិនទាល់ក្រោម)

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 1-3n$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ ដែល $M = -2$ ជាចំនួនទាល់លើ

ខ. យើងមាន $a_n = \dfrac{\pi}{n}$

យើងបាន $a_1 = \pi , a_2 = \dfrac{\pi}{2} , a_3 = \dfrac{\pi}{3}$, $a_4 = \dfrac{\pi}{4} , \ldots , a_{10000} = \dfrac{\pi}{10000} , \ldots$

នោះ $\pi = a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \cdots \Rightarrow a_n \le \pi$

នោះ $M = 2$ ជាចំនួនទាល់លើ

ម្យ៉ាងទៀត កាលណា $n \to \infty$ នោះ $a_n = \dfrac{\pi}{n} \to 0$

$\Rightarrow m = 0$ ជាចំនួនទាល់ក្រោម

យើងបាន $0 \le a_n \le \pi$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{\pi}{n}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ ដែលមាន $M = \pi$ ជាចំនួនទាល់លើ និង $m = 0$ ជាចំនួនទាល់ក្រោម។

គ. យើងមាន $a_n=\frac{3^n}{n}$

យើងបាន $a_1=3$, $a_2=\frac{9}{2}$, $a_3=9$, $a_4=\frac{81}{4}$, ...

នោះ $3=a_1<a_2<a_3<a_4<\cdots \qquad \Rightarrow a_n\geq 3$

$\Rightarrow m=3$ ជាចំនួនទាល់ក្រោម

ម្យ៉ាងទៀត បើ $n\to\infty$ នោះ $a_n=\frac{3^n}{n}$ មានតម្លៃធំមិនកំណត់បាន (∞)

នោះ (a_n) គ្មានចំនួនទាល់លើទេ

ដូចនេះ ស៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n=\frac{3^n}{n}$ ជាស៊ីតទាល់ក្រោម ដែលមាន $m=3$ ជាចំនួនទាល់ក្រោម។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. បង្ហាញថា ស៊ីត (a_n) ដែល $a_n=\frac{20n}{2n+1}$ ជាសស៊ីតទាល់។

២. រកគោលក្រោមនៃស៊ីត (a_n) ដែល $a_n=\frac{e^n}{n}$

៣. តើបណ្តាស៊ីតខាងក្រោម ជាស៊ីតទាល់ឬទេ ?

ក. ស៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n=\frac{n^2-1}{n}$

ខ. ស៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}$, $n\in\mathbb{N}$

គ. ស៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n=\frac{n+1}{n+3}$

ឃ. ស៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

៤. បង្ហាញថា ស៊ីត (a_n) ដែល $a_n=\sqrt{n^4+n^2}-n^2$ ជាស៊ីតទាល់។

៥.រកគោលលើនៃស៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n=\frac{2n}{n+3}$ រួចបង្ហាញថា (a_n) ជាស៊ីតទាល់។

ចំណាំ : បើ $n \to \infty$ នោះយើងបាន ៖

☞ $\frac{A}{n^p} \to 0$ ដែល A, p ជាចំនួនថេរ និង $p > 0$

គេសរសេរ $\lim_{n\to\infty} \frac{A}{n^p} = 0$

☞ $\frac{An}{B} \to \infty$, $\frac{e^n}{n^p} \to 0$ ដែល A, B, p ជាចចំនួនថេរ, $p > 0$

☞ $\frac{\text{មួយចំនួន}}{\infty} = 0$ ហើយ $\frac{\infty}{\text{មួយចំនួន}} = \infty$ ។

☞ បើ $a_n = \frac{f(n)}{g(n)}$ ដែល $f(n)$ និង $g(n)$ ជាអនុគមន៍ពហុធា កាលណា $n \to \infty$ នោះយើងយកតែតួនៃ $f(n)$ និង $g(n)$ ដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេ រួចសម្រួល ។

ឧទាហរណ៏ : $a_n = \frac{n^2 + 2n + 9}{2n^2 + n - 1}$

បើ $n \to \infty$ នោះ $a_n \to \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$

ឧទាហរណ៏ : $a_n = \frac{3n - 5}{2n^2 + n + 1}$

បើ $n \to \infty$ នោះ $a_n \to \frac{3n}{2n^2} = \frac{3}{2n} \to 0$

ឧទាហរណ៏ : $a_n = \frac{2n^2 + n - 5}{n - 4}$

បើ $n \to \infty$ នោះ $a_n \to \frac{2n^2}{n} = 2n \to \infty$

លំហាត់

១. សរសេរបីតួបន្ទាប់នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម :

ក. 5, 10 , 15 , 20 , ...

ខ. 1 , 5 , 14 , 30 , 55, ...

គ. 3 , 4 , 7 , 11 , 18 , 29 , ...

ឃ. 2 , 6 , 12 , 20 , 30 , 42 , ...

២. សរសេរតួស្វ៊ីតរាប់អស់ដូចខាងក្រោម :

ក. $a_n = 3^n - n^2$ ចំពោះ $1 \le n \le 4$

ខ. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ ចំពោះ $1 \le n < 6$

៣. សរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម :

ក. $a_n = n^2 + n$

ខ. $a_1 = 2$, $a_n = 2 + 3a_{n+1}$

គ. $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

ឃ. $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$

៤. កំណត់តួទី n ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម :

ក. 2,3,4,5,6...

ខ. 1 , −1 , 1 , −1 , 1 , −1 , ...

គ. 2 , 0 , 2 , 0 , 2 , 0 , ...

ឃ. $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \frac{1}{24}, \ldots$

ង. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \ldots$

ច. $\frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \ldots$

៥. បង្ហាញថាស៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n=\dfrac{1}{n+2}$ ជាស៊ីតចុះ ។

៦. បង្ហាញថាស៊ីត$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n=\dfrac{2n+1}{n+3}$ ជាស៊ីតកើន ។

៧. រកតម្លៃ α ដើម្បីឱ្យស៊ីត(a_n) ដែល $a_n=\dfrac{n+\alpha}{n+1}$ ជាស៊ីតកើន ។

៨. គេឱ្យ ស៊ីត(a_n)កំណត់ដោយ $a_n=2n^2+1$ ។

ក. សរសេរបួនតួដំបូងនៃស៊ីតនេះ ។

ខ. តើតួទីប៉ុន្មានដែលមានតម្លៃស្មើនឹង883 ?

៩. គេឱ្យស៊ីត$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលមាន $a_1=0$, $a_2=3$, $a_3=12$ និង $a_n=xn^2+yn+z$ ដែល x , y និង z ជាចំនួនពិត។រកតម្លៃ x , y និង z ។

១០. សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស៊ីត(a_n)ដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម :

ក. $a_n=\dfrac{2n+5}{n+1}$ ខ. $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$

គ. $a_n=2^n\cdot 5^{n-1}$ ឃ. $a_1=4$ និង $a_n=a_n-3$ ។

១១. រកគោលក្រោម និងគោលលើនៃស៊ីត$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n=\dfrac{8n}{2n+3}$

រួចបង្ហាញថា (a_n)ជាស៊ីតទាល់ ។

មេរៀនទី ២ ស្វ៊ីតនព្វន្ត

១. និយមន័យនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ស្វ៊ីតនព្វន្ត គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត ដែលតួនីមួយៗ(ក្រៅពីតួទី១) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់ បូកនឹង ចំនួនថេរ d មួយហៅថាផលសងរួម ។

$$\mathbf{d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \cdots = u_n - u_{n-1}}$$

ឧទាហរណ៍:គេឱ្យ $(u_n): 3, 6, 9, 12, \ldots$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។ចូរគណនាផលសងរួម d ។

ចម្លើយ $d = 6 - 3 = 3$

លំហាត់គំរូ : រកផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី១០០ ស្មើនឹង135 និង តួទី១០១ ស្មើនឹង 140 ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $u_{100} = 135$ និង $u_{101} = 140$

យើងបាន $d = u_{101} - u_{100} = 140 - 135 = 5$

២. តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែលមានតួទីមួយ u_1 និងមានផលសងរួម d នោះតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះគឺ $u_n = u_1 + (n-1)d$ ។

សម្រាយ (តាមលំនាំគំរូ)

យើងមាន $d = u_n - u_{n-1} \Leftrightarrow u_n = u_{n-1} + d$

យើងបាន: $u_2 = u_1 + d = u_1 + (2-1)d$

$u_3 = u_2 + d = (u_1 + d) + d = u_1 + 2d = u_1 + (3-1)d$

$u_4 = u_3 + d = (u_1 + 2d) + d = u_1 + 3d = u_1 + (4-1)d$

$u_5 = u_4 + d = (u_1 + 3d) + d = u_1 + 4d = u_1 + (5-1)d$

....

....

....

$\Rightarrow \mathbf{u_n = u_1 + (n-1)d}$

សម្រាយ(តាមអនុមានរួគណិតវិទ្យា ឬ វិចារកំណើន)

ស្រាយថា $u_n = u_1 + (n-1)d$

យើងមាន $u_n = u_{n-1} + d \quad (*)$

បើ $n = 2$ នោះ $u_2 = u_1 + d = u_1 + (2-1)d$ ពិត

ឧបមាថា $(*)$ ពិតដល់ $n = k$ នោះ $u_k = u_1 + (k-1)d$

យើងនឹងស្រាយថា $(*)$ ពិតដល់ $n = k+1$

យើងបាន $u_{k+1} = u_k + d$

$= u_1 + (k-1)d + d$

$= u_1 + \left[(k+1) - 1\right]d$ ពិត

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្តគឺ $\boxed{\mathbf{u_n = u_1 + (n-1)d}}$

លំហាត់គំរូទី១ : គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $5, 10, 15, 20, 25, \ldots$ ។

ក. គណនាតួទី 50 នៃស្វ៊ីត ។

ខ. សរសេររូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ ។

គ. តើចំនួន 555 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត ?

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាតួទី 50 នៃស៊ីត

យើងមានស៊ីត

នោះ ផលសងរួម $d = 10 - 5 = 5$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{50} &= u_1 + (50-1)d \\ &= 5 + (50-1)\cdot 5 \\ &= 250 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{u_{50} = 250}$

ខ. សរសេររូបមន្តតួទី n នៃស៊ីតនេះ

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (n-1)d \\ &= 5 + (n-1)\cdot 5 \\ &= 5 + 5n - 5 \\ &= 5n \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 5n}$

គ. រកតួដែលត្រូវនឹងចំនួន 555

តាង n ចំនួនតួ ដែល $u_n = 555$

តែ $u_n = 5n$

យើងបាន $5n = 555$

$$\Rightarrow n = \frac{555}{5} = 111$$

ដូចនេះ ចំនួន 555 ត្រូវនឹងតួទី 111

លំហាត់គំរូទី២ : គេមានស៊ីតនព្វន្ត $5,12,19,26,...$ ។

ក. សរសេររូបមន្តតួទី n នៃស៊ីតនេះ ។

ខ. តើចំនួន 14089 តួទីប៉ុន្មាននៃស៊ីតនេះ ?

ដំណោះស្រាយ

ក. សរសេររូបមន្តតួទី n នៃស៊ីតនេះ

យើងមាន $d=12-5=7$

យើងបាន
$$\begin{aligned} u_n &= u_1+(n-1)d \\ &= 5+(n-1)\cdot 7 \\ &= 5+7n-7 \\ &= 7n-2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n=7n-2}$

ខ. រកតួដែលត្រូវនឹងចំនួន 14089

តាង n ជាចំនួនតួដែល $u_n=14089$

តែ $u_n=7n-2$

យើងបាន
$$\begin{aligned} 7n-2 &= 14089 \\ 7n &= 14091 \\ \Rightarrow n &= 2013 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ចំនួន 14089 តួទី 2013

លំហាត់គំរូទី៣ : កំណត់ចំនួនតួនៃស៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម ។

ក. $3,11,19,...,9867$

ខ. $2000,1985,1970,...,5$

គ. $6,11,16,21,\cdots,11111$

ឃ. $3,9,15,21,\cdots597$

ដំណោះស្រាយ

ក. $3,11,19,...,9867$

យើងមាន $d=11-3=8$

តាង n ជាចំនួនតួ ដែល $u_n=9867$

ដោយ $u_n=u_1+(n-1)d$

$=3+(n-1)\cdot 8$

$=8n-5$

យើងបាន $u_n=9867 \quad \Leftrightarrow 8n-5=9867$

$\Leftrightarrow 8n=9872$

$\Rightarrow n=1234$

ដូចនេះ ស្វ៊ីតនព្វន្ត $3,11,19,...,9867$ មាន 1234 តួ

ខ. $2000,1985,1970,...,5$

យើងមាន $d=1985-2000=-15$

តាង n ជាចំនួនតួ ដែល $u_n=5$

តែ $u_n=u_1+(n-1)d$

$=2000+(n-1)\cdot(-15)$

$=2015-15n$

យើងបាន $2015-15n=5$

$15n=2010$

$n=134$

ដូចនេះ ស្វ៊ីតនព្វន្ត $2000,1985,1970,...,5$ មាន 134 តួ

គ. 2222 តួ

ឃ. 100 តួ

លំហាត់គំរូទី៤ : ស៊ីតនព្វន្តមួយមានតួទីមួយស្មើ -20 និងផលសងរួមស្មើ 3។

ក. គណនាតួទី១០នៃស៊ីតនេះ ។

ខ. សរសេររូបមន្តតួទី n នៃស៊ីតនេះ

គ. តើតួទីប៉ុន្មាននៃស៊ីតនេះ ដែលមានតម្លៃស្មើនឹង 310 ?

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាតួទី10នៃស៊ីតនេះ

យើងមាន តួទីមួយ $u_1=-20$ និង ផលសងរួម $d=3$

យើងបាន តួទី១០: $u_{10}=u_1+(10-1)d$

$$=-20+9\cdot 3$$

$$=7$$

ដូចនេះ តួទី១០នៃស៊ីតនេះគឺ $\boxed{u_{10}=7}$

ខ. សរសេររូបមន្តតួទី n នៃស៊ីតនេះ

$$\begin{aligned}u_n&=u_1+(n-1)d\\&=-20+(n-1)\cdot 3\\&=3n-23\end{aligned}$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស៊ីតនេះគឺ $\boxed{u_n=3n-23}$

គ. រកតួដែលមានតម្លៃស្មើនឹង 310 ?

តាង n ជាចំនួនតួ ដែល $u_n=310$

តែ $u_n=3n-23$

យើងបាន $3n-23=310$

$$3n=333$$

$$n=111$$

ដូចនេះ តួទី 111 មានតម្លៃស្មើនឹង 310

លំហាត់គំរូទី៥: រកតួទូទៅ (u_n) និង តួទីដប់ (u_{10}) នៃស៊ីតនព្វន្ត ខាងក្រោម:

ក. $1, 7, 13, \ldots$ ខ. $6, \frac{11}{2}, 5, \ldots$

ដំណោះស្រាយ

ក. $1, 7, 13, \ldots$

យើងមាន $d = 7 - 1 = 6$

យើងបាន
$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (n-1)d \\ &= 1 + (n-1)\cdot 6 \\ &= 6n - 5 \end{aligned}$$

ដូចនេះ តួទី n គឺ $\boxed{u_n = 6n - 5}$

តួទី១០ : $u_{10} = 6\cdot 10 - 5 = 55$

ខ. $6, \frac{11}{2}, 5, \ldots$

យើងមាន $d = \frac{11}{2} - 6 = -\frac{1}{2}$

យើងបាន
$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (n-1)d \\ &= 6 + (n-1)\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{12 - n + 1}{2} \\ &= \frac{13 - n}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \frac{13 - n}{2}}$

តួទី១០ : $u_{10} = \frac{13 - 10}{2} = \frac{3}{2}$

លំហាត់គំរូទី៦ : គេឱ្យស៊ីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនង:

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases} , \ n \in \mathbb{N}$$ ។

ក. កំណត់ a_n ដែលជាតួទី n នៃស៊ីតនេះ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនា a_{13} , a_{19} និង a_{100} ។

គ. គណនា p បើ $a_p = 154$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់ a_n ដែលជាតួទី n នៃស៊ីតនេះ ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $a_{n+1} = a_n + 3 \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = 3$ (ជាចំនួនថេរ)

នោះ (a_n) ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d = 3$

យើងបាន
$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ &= 7 + (n-1)\cdot 3 \\ &= 3n + 4 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{a_n = 3n + 4}$

ខ. គណនា a_{13} , a_{19} និង a_{100}

យើងមាន $a_n = 3n + 4$

- $a_{13} = 3\cdot 13 + 4 = 43$
- $a_{19} = 3\cdot 19 + 4 = 61$
- $a_{100} = 3\cdot 100 + 4 = 604$

ដូចនេះ $\boxed{a_{13} = 43 , a_{19} = 61 , a_{100} = 604}$

គ. គណនា p

យើងមាន $a_n = 3n + 4$ នោះ $a_p = 3p + 4$

តែ $a_p = 154$

យើងបាន $3p+4=154$

$$3p=150$$

$$p=50$$

ដូចនេះ $\boxed{p=50}$

☞ **ចំណាំ:** **បើយើងដឹង u_p $(p\in\mathbb{N})$ នោះយើងអាចគណនា u_n បានគឺ:**

$$\boxed{\mathbf{u_n=u_p+(n-p)d}}$$

សម្រាយ

យើងមាន $u_n=u_1+(n-1)d \quad (1)$

នោះ $u_p=u_1+(p-1)d \quad (2)$

យកក $(1)-(2)$ យើងបាន $u_n-u_p=(n-p)d$

$$\Rightarrow u_n=u_p+(n-p)d$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{u_n=u_p+(n-p)d}}$ នោះ $\boxed{\mathbf{d=\dfrac{u_n-u_p}{n-p}}}$

លំហាត់គំរូទី៧ : គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។ បើគេដឹងថា $u_{35}=9, u_{45}=17$ ។ គណនា u_{40} ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $u_{35}=9$, $u_{45}=17$

ដោយ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តយើងបាន $u_{45}=u_{35}+(45-35)d$

$$\Rightarrow d=\frac{u_{45}-u_{35}}{45-35}=\frac{17-9}{10}=\frac{4}{5}$$

យើងបាន $u_{40}=u_{35}+(40-35)\cdot\dfrac{4}{5}$

$$=9+5\cdot\frac{4}{5}$$

$$=13$$

ដូចនេះ $\boxed{u_{40}=13}$

របៀបទី២: ដោយ (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្តនោះ $u_{40}=\dfrac{u_{35}+u_{45}}{2}=\dfrac{9+17}{2}=13$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គេឱ្យ (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្តដែលកំណត់ដោយ $u_8-u_5=30$ ។

គណនាផលសងរួម d នៃស៊ីតនេះ ។

២. រកតួទី n នៃស៊ីតនព្វន្តដែល $u_3=4$ និង $u_7=-24$ ។

៣. គេឱ្យស៊ីតនព្វន្ត : $3\ ,\ 2\frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ -6$ ។

ក. រក u_1 និង d

ខ. តើស៊ីតនេះ មានប៉ុន្មានតួ ?

៤. គេឱ្យស៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនង: $\begin{cases}u_{n+1}=u_n+7\\ u_1=5\end{cases},n\in\mathbb{N}$ ។

ចូរគណនា u_n ដែលជាតួទី n នៃស៊ីត។

៣. ផលបូកតួនៃស៊ីតនព្វន្ត

ក. ផលបូកស្មើចម្ងាយពីតួចុង

ផលបូកស្មើចម្ងាយពីតួចុង ស្មើនឹងផលបូកតួចុងទាំងពីរ ។

គេកំណត់សរសេរ $u_1+u_n=u_p+u_{n-p+1}$

ឬ បើ $m+n=p+k$ នោះ $u_m+u_n=u_p+u_k$ ។

សម្គាល់ :

- បើគេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_5 , u_6$

  នោះ $u_1 + u_6 = u_2 + u_5 = u_3 + u_4$
- បើ u_1 , u_2 , u_3 ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ $2u_2 = u_1 + u_3$
- បើ $u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_5$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

  នោះ $u_1 + u_5 = u_2 + u_4 = 2u_3$
- បើ $m + n = 2p$ ឬ $p = \frac{m+n}{2}$ នោះ $u_p = \frac{u_m + u_n}{2}$

លំហាត់គំរូទី១ : រកបីចំនួនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដោយដឹងថាផលបូកតួនៃបីចំនួននេះស្មើនឹង 30 ហើយផលគុណវាស្មើនឹង 910 ។

ដំណោះស្រាយ

រកបីចំនួននោះ

តាង u_1 , u_2 , u_3 ជាបីចំនួនជាស្វ៊ីតនព្វន្តនោះ

យើងបាន $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 30 \quad (1) \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 910 \quad (2) \end{cases}$ (សន្មតយក $u_1 < u_2 < u_3$)

តែ u_1 , u_2 , u_3 ជាស្វ៊ីតនព្វន្តនោះ $u_1 + u_3 = 2u_2 \quad (3)$

តាម (1) និង (3) យើងបាន $3u_2 = 30 \Rightarrow u_2 = 10$

យក $u_2 = 10$ ជំនួសក្នុង (1) និង (2) យើងបាន $\begin{cases} u_1 + u_3 = 20 \\ u_1 \cdot u_3 = 91 \end{cases}$

នោះ u_1 និង u_3 ជាឫសនៃសមីការ $U_2 - SU + P = 0$

$$U^2 - 20U + 91 = 0$$
$$\Delta' = 100 - 91 = 9 = 3^2$$
$$U = 10 - 3 = 7 \ , \ U' = 10 + 3 = 13$$

នោះ $u_1 = 7 \ , u_3 = 13$

ដូចនេះ បីចំនួននោះ គឺ $\boxed{7 \ , \ 10 \ , 13}$

លំហាត់គំរូទី២ : គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែល $u_7 = 25$ និង $u_{103} = 313$ ។
គណនា u_{55} ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_{55}

ដោយ $55 = \dfrac{7+103}{2}$ នោះ $u_{55} = \dfrac{u_7 + u_{103}}{2} = \dfrac{25+313}{2} = 169$

ដូចនេះ $\boxed{u_{55} = 169}$

➢ **ករណីពិសេស :**

បីចំនួន a,b,c ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តកាលណា $2b = a + c$ ឬ $b = \dfrac{a+c}{2}$
b ហៅថា មធ្យមនព្វន្ត នៃ a និង c ។

ដូចនេះ ដើម្បីបង្ហាញថា បីចំនួនតគ្នា $\mathbf{a,b,c}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត យើងត្រូវ បង្ហាញ $\mathbf{2b = a + c}$ ឬ $\mathbf{b = \dfrac{a+c}{2}}$

លំហាត់គំរូទី៣ : បង្ហាញថា $\dfrac{a}{a-1}, \dfrac{3a-2}{a^2-1}, \dfrac{4-a}{a+1}$ ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីនព្វន្ត។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\dfrac{a}{a-1} + \dfrac{4-a}{a+1} = \dfrac{a(a+1)+(4-a)(a-1)}{(a-1)(a+1)}$

$$= \frac{a^2 + a + 4a - 4 - a^2 + a}{a^2 - 1}$$

$$= \frac{6a-4}{a^2-1} = 2\left(\frac{3a-2}{a^2-1}\right)$$

ដោយ $2\left(\dfrac{3a-2}{a^2-1}\right) = \dfrac{a}{a-1} + \dfrac{4-a}{a+1}$

ដូចនេះ $\dfrac{a}{a-1}, \dfrac{3a-2}{a^2-1}, \dfrac{4-a}{a+1}$ ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីនព្វន្ត

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. រកបីចំនួនជាស៊ីតនព្វន្ត ដោយដឹងថាផលបូកនៃបីចំនួននេះស្មើនឹង 30 និងផលគុណវា ស្មើនឹង 910។

២. គេឱ្យ (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្តដែល $u_{15}=71, u_{2015}=8071$ ។ គណនា u_{1015} ។

៣. . គេឱ្យ (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមាន $u_7=25$ និង $u_{103}=313$ ។ គណនា u_{55} ។

៤. គេឱ្យ (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមាន $u_{35}=9$ និង $u_{45}=17$ ។ គណនា u_{40} ។

៥. រកបីតួបន្តបន្ទាប់គ្នា នៃស៊ីតនព្វន្តមួយ ដោយដឹងថាផលបូករបស់វាស្មើនឹង 3 និង ផលគុណរបស់វាស្មើនឹង -15 ។

៦. បង្ហាញថា ចំនួនខាងក្រោមជាស៊ីតនព្វន្ត

ក. $\dfrac{1}{x+1}, \dfrac{x}{x^2-1}, \dfrac{1}{x-1}$

ខ. $(a^2+b^2)^2$, a^4+b^4 , $(a^2-b^2)^2$

គ. $\dfrac{4}{x-1}, \dfrac{6x}{x^3-1}, \dfrac{4-4x}{x^2+x+1}$

ឃ. $(a^2-2ab-b)^2, (a^2+b^2)^2, (a^2+ab-b^2)^2$

៧. បើ $\dfrac{1}{a+b}, \dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{b+c}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត បង្ហាញថា a^2 , b^2 , c^2 ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

៨. បើ a,b,c ជាស៊ីតនព្វន្ត ។ បង្ហាញថា a^2-bc , b^2-ac , c^2-ab ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

៩. បើ a, b, c ជាស៊ីតនព្វន្ត បង្ហាញថា a^2+ab+b^2 , a^2+ac+c^2 និង b^2+bc+c^2 ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

ខ. ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនព្វន្ត

ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនព្វន្តដែលមាន u_1 ជាតួទី១ និង u_n ជាតួទី n គឺ $\mathbf{S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)}$ ឬ $\mathbf{S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនព្វន្ត

យើងបាន $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$ (1)

ឬ $S_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + ... + u_3 + u_2 + u_1$ (2)

$(1)+(2)$ យើងបាន:

$$2S_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + ... + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1)$$

តែ $u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = ... = u_{n-1} + u_2 = u_n + u_1$

(តាមផលបូកស្មួចម្ងាយពីតួចុង)

យើងបាន:

$$2S_n = (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + ... + (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) = n(u_1 + u_n)$$

$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ ហើយ ដោយ $u_n = u_1 + (n-1)d$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]}}$

Note : $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$

$S_{n-1} = u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$ ហើយ $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} + u_n$

នោះ $S_n - S_{n-1} = u_n$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{u_n = S_n - S_{n-1}}}$

លំហាត់គំរូទី១: គណនាផលបូក 12 តួដំបូងនៃស្ទីតនព្វន្ត $5, 12, 19, 26, \ldots$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក 12 តួដំបូងនៃស្ទីតនព្វន្ត $5, 12, 19, 26, \ldots$

យើងមាន $d = 12 - 5 = 7$

ហើយ $u_1 = 5 \Rightarrow u_{12} = u_1 + (12-1)d = 5 + 11 \cdot 7 = 82$

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{n}{2}\left(u_1 + u_n\right)$

យើងបាន
$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{12}{2}\left(u_1 + u_{12}\right) \\ &= \frac{12}{2}\left(5 + 82\right) \\ &= 522 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{12} = 522}$

របៀបម្យ៉ាងទៀត

យើងមាន $d = 12 - 5 = 7$

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right]$

យើងបាន
$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{12}{2}\left[2u_1 + (12-1)d\right] \\ &= 6\left(2 \cdot 5 + 11 \cdot 7\right) \\ &= 6(10 + 77) \\ &= 552 \end{aligned}$$

លំហាត់គំរូទី២: គណនាផលបូក $(-6) + (-1) + 4 + 9 + \cdots + 64$

ដំណោះស្រាយ

តាង $S_n = (-6) + (-1) + 4 + 9 + \cdots + 64$

រកចំនួនតួនៃផលបូលតួស្វ៊ីតនេះ (ស៊េរី)

តាង n ជាចំនួនតួ ដែល $u_n = 64$

យើងមាន $d = (-1) - (-6) = 5$

នោះ $u_n = u_1 + (n-1)d$

$= -6 + (n-1)\cdot 5$

$= 5n - 11$

យើងបាន $5n - 11 = 64$

$5n = 75$

$n = 15$

តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{n}{2}\left(u_1 + u_n\right)$

យើងបាន $S_{15} = \dfrac{15}{2}\left(u_1 + u_{15}\right)$

$= \dfrac{15}{2}\left(-6 + 64\right)$

$= 435$

ដូចនេះ $\boxed{(-6) + (-1) + 4 + 9 + \cdots + 64 = 435}$

លំហាត់គំរូទី៣ : គណនា $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)$

ដំណោះស្រាយ

តាង $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)$

ដោយស្វ៊ីត $1, 3, 5, 7, \ldots, (2n-1)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $d = 3 - 1 = 2$

យើងបាន $S_n = \dfrac{n}{2}\left(u_1 + u_n\right)$

$= \dfrac{n}{2}\left[1 + (2n-1)\right]$

$= n^2$

ដូចនេះ $\boxed{1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2}$

លំហាត់គំរូទី៤ : គណនាផលបូក 25 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $2,9,16,25,\ldots$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $d=9-2-7$ ហើយ $u_1=2$

យើងបាន $S_{25}=\frac{25}{2}\left[2u_1+(25-1)d\right]$

$=\frac{25}{2}\left(2\cdot 2+24\cdot 7\right)$

$=2150$

ដូចនេះ $\boxed{S_{25}=2150}$

លំហាត់គំរូទី៥ : គេមានការងាររដូវក្តៅ២ សម្រាប់រយៈពេល ៣ខែ ឬ ១២សប្តាហ៍។ ការងារ A ទទួលបានប្រាក់បៀវត្ស 325000 រៀលក្នុងមួយខែ ហើយដំឡើង 100000 រៀល រៀងរាល់ខែ ។ ការងារ B ទទួលបានប្រាក់បៀវត្ស 80000 រៀលក្នុងមួយសប្តាហ៍ ហើយយដំឡើង 3000 រៀល រៀងរាល់សប្តាហ៍។

តើគេគួរជ្រើសរើសយកការងារណាប្រសើរជាង ?

ដំណោះស្រាយ

- ចំពោះការងារ A ប្រាក់បៀវត្សគឺ

$$S_A=325000+(325000+100000)+(325000+10000+10000)$$

$$=325000+425000+525000$$

$$=1275000 \text{ រៀល}$$

- ចំពោះការងារ B ប្រាក់បៀវត្សគឺ 80000, $(80000+3000)$, $(80000+3000+3000),\ldots$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $u_1=80000$ និងផលសងរួម $d=3000$

នោះប្រាក់បៀវត្សនៅ១២ សប្តាហ៍គឺ $S_B = \frac{12}{2}\left[2u_1 + (12-1)d\right]$

$$= 6\left(2\cdot 80000 + 11\cdot 3000\right)$$

$= 1158000$ រៀល

ដោយ $S_A = 1275000$ រៀល $> S_B = 1158000$ រៀល

ដូចនេះ គេគួរជ្រើសរើសការងារ A ប្រសើរជាង

លំហាត់គំរូទី៦ : គេមានស៊ីតនព្វន្ត $51, 47, 43, \ldots$ ។ កំណត់ចំនួនតួ (n) ដើម្បីឱ្យផលបូក n តួដំបូង(S_n) មានតម្លៃអតិបរមា និង កំណត់ S_n ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនតួ

តាង u_n ជាតួទូទៅនៃស៊ីតនព្វន្តនេះ

ដោយ $d = 47 - 51 = -4$ ហើយ $u_1 = 51$

យើងបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$= 51 + (n-1)(-4)$$

$$u_n = 55 - 4n$$

ផលបូក n តួដំបូងមានតម្លៃអតិបរមា កាលណា $u_n \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

យើងបាន $55 - 4n \geq 0$

$$\Rightarrow n \leq \frac{55}{4} = 13.75 \ , n \in \mathbb{N}$$

នោះយើងទាញបាន S_n មានតម្លៃអតិបរមា កាលណា $n = 13$

គណនា S_{13}

យើងមាន $u_n = 55 - 4n \Rightarrow u_{13} = 55 - 4\cdot 13 = 3$

យើងបាន $S_{13}=\frac{13}{2}(u_1+u_{13})$

$=\frac{13}{2}(51+3)$

$=351$

ដូចនេះ ផលបូក n តួដំបូង(S_n) មានតម្លៃអតិបរមាកាលណា $n=13$

ហើយ $S_{13}=351$

លំហាត់គំរូទី៧ : កំណត់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យផលបូក n តួដំបូង (S_n) នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត: $-28,-25,-22,\dots$ មានតម្លៃអប្បបរមា រួចគណនាតម្លៃអប្បបរមានោះ។

ដំណោះស្រាយ

តាង u_n ជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ដោយ $d=(-25)-(-28)=3$ ហើយ $u_1=-28$

យើងបាន $u_n=u_1+(n-1)d$

$=-28+(n-1)\cdot 3$

$=3n-31$

S_n មានតម្លៃអប្បបរមាកាលណា $u_n\le 0$

យើងបាន $3n-31\le 0$

$\Rightarrow n\le\frac{31}{3}=10.33$

នោះ យើងទាញបាន $n=13$

$S_{10}=\frac{10}{2}\left[2u_1+(10-1)d\right]$

$=5\left[2\cdot(-28)+9\cdot 3\right]$

$=-145$

ដូចនេះ $\boxed{n=10\ ,S_{10}=-145}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គេឱ្យស៊ីតនព្វន្ត $5,12,19,26,...$

ក. គណនា តួទី 16 ។

ខ. គណនាផលបូក 16 តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ ។

២. គណនាផលបូក 7 តួដំបូងនៃស៊ីតនព្វន្ត $12, 9, 6, \ldots$ ។

៣. គណនាផលបូកនៃស៊ីតននព្វន្តខាងក្រោមៈ

ក. $2+6+10+14+\cdots+122$

ខ. $100+95+90+85+\cdots+(-20)$

គ. $4+10+16+22+\cdots+334$

៤. គណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស៊ីតនព្វន្ត $7,3,-1,-5,...$

៥. កំណត់ចំនួនតួនៃស៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម រួចគណនាផលបូកតួនៃស៊ីតនេះ

ក. $5, 8, 11, 14, \ldots, 62$

ខ. $1, 6, 11, 16, \ldots, 506$

គ. $-193, -189, -185, \ldots, -17$

ឃ. $2\frac{1}{4}, 2\frac{17}{20}, 3\frac{9}{20}, \ldots, 20\frac{1}{4}, 20\frac{17}{20}$

៦. កំណត់តួទី១ និងផលសងរួមនៃស៊ីតនព្វន្តមួយ ដោយដឹងថាផលបូក n តួដំបូងស្មើនឹង $\frac{n^2}{2}$ ។

៧. គណនាផលបូក 10 តួដំបូងនៃស៊ីតនព្វន្ត $17,14,11,8,5,...$ រួចកំណត់ចំនួនតួដើម្បីឱ្យផលបូកនៃស៊ីតនេះមានតម្លៃអតិបរមា (ធំបំផុត) ។ គណនាតម្លៃអតិបរមានៃ S_n ។

៨. គេមានស៊ីតនពន្ត $85,73,61,49,...$ ។ កំណត់ចំនួនតួ (n) ដើម្បីឱ្យផលបូក n តួដំបូងមានតម្លៃអតិបរមា រួចគណនាតម្លៃអតិបរមានៃ S_n ។

លំហាត់

១. សរសេររូបមន្តតួទី n រួចគណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ខាងក្រោម :

ក. $1, 5, 9, \ldots$

ខ. $50, 48, 46, \ldots$

គ. $-7, -3, 1, \ldots$

២. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $-8, -3, 2, 7, \ldots$ ។

ក. គណនា u_{17} និង u_{43} ។

ខ. តើតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតដែលស្មើនឹង 322 ?

៣. កំណត់ចំនួនតួ រួច គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម :

ក. $18, 13, 8, \ldots, -102$

ខ. $-9, -4, 1, \ldots 171$

គ. $105, 110, 115, \ldots 995$

ឃ. $1, 6, 11\ 16, \ldots, 506$

៤. គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត បើគេដឹងថា

ក. $u_7 = \dfrac{7}{2}$ និង $u_{13} = \dfrac{13}{2}$ ។ ចូរគណនា u_2 ។

ខ. $u_2 = -12$ និង $S_{12} = 18$ ។ គណនា u_1 , d និង u_6 ។

៥. គេឱ្យប្រាំចំនួនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ គណនាចំនួនទាំងនោះ បើគេដឹងថា ផលបូវាស្មើនឹង 125 ហើយផលបូកពីរតួដំបូងស្មើនឹង 38 ។

៦. ផលបូក 9 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើនឹង 162 ហើយផលបូក 12 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើនឹង 288 ។ គណនាផលបូក 30 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

៧. រកបីចំនួនតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដោយដឹងថាផលបូកនៃបីចំនួននេះស្មើនឹង 36 និង ផលគុណវាស្មើនឹង 1428 ។

៨. គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានតួទីបីស្មើ 18 និង តួទី17 ស្មើ 30 ។
គណនាផលបូក 33តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

៩. គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមាន $u_4 = 15$ និង $S_5 = 55$ ។ គណនា u_1 និង d ។

១០. ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមាន $u_{13} = 6u_2$ និង $S_{15} = 615$ ។ គណនា u_1 និង d ។

១១. ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានតួទី៣ស្មើនឹង -20 និង តួទី១១ស្មើនឹង 20 ។
គណនាផលបូក 13តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

១២. គេឱ្យបីចំនួនបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។ ផលបូកនៃចំនួនទាំងបីនេះ
ស្មើនឹង 18 ហើយផលបូកនៃការេរបស់វាស្មើនឹង 206 ។
រកចំនួនទាំងបីនោះ ។

១៣.ផលបូកបីតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើ33 ហើយផលគុណរបស់វាស្មើ 1287 ។
រកចំនួនទាំងបីនោះ ។

១៤. តើគេអាចយកប៉ុន្មានតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានផលសងរួម $d = 3$
ហើយតួទីមួយ $u_1 = 7$ និង ផលបូកតួស្មើ 205 ?

១៥. គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $5, 8, 11, 14, ...$ ។ តើគេត្រូវបូកប៉ុន្មានតួនៃស្វ៊ីតនេះ
ដើម្បីឱ្យផលបូកមានតម្លៃស្មើនឹង 98 ។

១៦. គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី $u_1 = 1$ និងផលសងរួម d ។
គណនា d ដើម្បីឱ្យផលបូក 100តួដំបូងស្មើនឹង 1 ។ តើមានតួណា
ស្មើនឹងសូន្យ ឬទេ ? បើមានតើនៅតួទីប៉ុន្មាន ?

១៧. នៅក្នុងស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ គេឱ្យផលបូក $2n$ តួដំបូង ស្មើនឹងពាក់កណ្ដាល
នៃផលបូក$3n$តួដំបូង ។ ប្រសិនបើតួទី១ ស្មើនឹង 12 និង ផលសងរួម
ស្មើនឹង 3 ចូរគណនាតម្លៃនៃ n ។

១៨. គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $u_3 = -15$ និង $u_{14} = 18$ ។
គណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

១៩. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យបីចំនួន $10-3x$, $2x^2+3$, $7-4x$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

២០. គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែល $u_1+u_4+u_7+u_{10}+u_{13}+u_{16}=2013$ ។
ចូរគណនា $u_1+u_6+u_{11}+u_{16}$ ។

២១. គណនាតួទី n និង ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $1,\dfrac{n-1}{n},\dfrac{n-2}{n},\dfrac{n-3}{n},...$

២២. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ដែល $u_n=\dfrac{2n+3}{5}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកើន រួចគណនា S_{10} ។

២៣. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $2 , 7 , 12 ,...$ និងស្វ៊ីតនព្វន្ត $2 , 5 , 8 ,...$។
តើក្នុងចំណោម ១២១ តួដំបូងនៃស្វ៊ីតទាំងពីរនេះ មានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើៗគ្នា?

២៤. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $1 , 3 , 5 ,...$ និងស្វ៊ីតនព្វន្ត $1 , 5 , 9 ,...$។
តើក្នុងចំណោម ១៥០តួដំបូងនៃស្វ៊ីតទាំងពីរនេះ មានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើៗគ្នា?

២៥. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $1,4,7,...$ និងស្វ៊ីតនព្វន្ត $1,5,11,...$។
តើក្នុងចំណោម ២០១៣តួដំបូងនៃស្វ៊ីតទាំងពីរនេះ មានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើៗគ្នា ?

២៦. ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមាន តួទី១ $u_1=-23$ និងផលសងរួម $d=2.5$ ។
កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ n ដើម្បីឱ្យ $S_n>0$ ។

២៧. ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមាន តួទី១ $u_1=-61$ និងផលសងរួម $d=4$ ។
កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ n ដើម្បីឱ្យ $S_n>0$ ។

២៨. ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានតួទី១ $u_1=10$ និងផលសងរួម $d=0.25$ ។
រកចំនួនតួតិចបំផុតដែលផលបូកតួនៃស្វ៊ីតនេះមានតម្លៃលើសពី 300 ។

២៩. ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានតួទី១ $u_1=-5$ និងផលសងរួម $d=1.5$ ។
រកចំនួនតួច្រើនបំផុតដែលផលបូកតួនៃស្វ៊ីតនេះមានតម្លៃមិនលើសពី 450 ។

មេរៀនទី ៣ ស៊ីតធរណីមាត្រ

១. និយមន័យ

ស៊ីតធរណីមាត្រ គឺជាស៊ីតនៃចំនួនពិត ដែលតួនីមួយៗ(ក្រៅពីតួទី១) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់ គុណនឹងចំនួនថេរ q ដែល $q \neq 0$ ។ ចំនួនថេរ q ហៅថាផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រ ។

- Note : ឯកសារខ្លះតាង ផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រដោយ r (ratio)
- ផលធៀបរួបនៃស៊ីតធរណីមាត្រ $(q \neq 0$ ឬ $r \neq 0)$កំណត់ដោយៈ

$$\mathbf{q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \dots = \frac{u_n}{u_{n-1}}}$$

ឧទាហរណ៍ : ស៊ីត$(a_n): 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ គឺជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន ផលធៀបរួម $q = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2$

លំហាត់គំរូ : រកផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី12 ស្មើនឹង 531441 និង តួទី13 ស្មើនឹង1594323 ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $u_{12} = 531441$និង $u_{13} = 1594323$

យើងបាន $q = \frac{1594323}{531441} = 3$

ដូចនេះ ផលធៀបរួមនៃស៊ីតនេះគឺ $q = 3$

២. តួទី n នៃស្ទីតធរណីមាត្រ

បើ $(\mathbf{u_n})$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១ $\mathbf{u_1}$ និងផលធៀបរួម $\mathbf{q}$ នោះតួទី $\mathbf{n}$ នៃស្ទីតនេះ កំណត់ដោយ $\mathbf{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$ ។

សម្រាយ(តាមលំនាំគំរូ)

យើងមាន $q = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ ឬ $u_n = u_{n-1} \cdot q$ $\quad (n \geq 2 \ , n \in \mathbb{N})$

យើងបាន $u_2 = u_1 \cdot q = u_1 \cdot q^{2-1}$

$u_3 = u_2 \cdot q = (u_1 \cdot q) \cdot q = u_1 \cdot q^2 = u_1 \cdot q^{3-1}$

$u_4 = u_3 \cdot q = (u_1 \cdot q^2) \cdot q = u_1 \cdot q^3 u_1 \cdot q^{4-1}$

....

....

$\Rightarrow u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

ដូចនេះ $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

សម្រាយតាមអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា

ស្រាយថា $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ $\quad (*)$

យើងមាន $u_n = u_{n-1} \cdot q$

បើ $n = 2$ នោះ $u_2 = u_1 . q = u_1 \cdot q^{n-1}$ ពិត

ឧបមាថា (8) ពិតដល់ $n = k$ នោះ $u_k = u_1 . q^{n-1}$

យើងនឹងស្រាយថា $(*)$ ពិតដល់ $n = k + 1$

$u_{k+1} = u_k \cdot q = u_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = u_1 \cdot q^{(n+1)-1}$ ពិត

ដូចនេះ $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

លំហាត់គំរូទី១ : គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $3, 12, 48, 192, \ldots$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $3, 12, 48, 192, \ldots$

$$q = \frac{12}{3} = 4$$

យើងបាន $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1}$

លំហាត់គំរូទី២ : គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $6, 18, 54, \ldots$ ។

ក. គណនាតួទី 8 ។

ខ. សរសេរ រូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ ។

គ. តើចំនួន 118098 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា u_8

យើងមាន $u_1 = 6$ ហើយ $q = \frac{18}{6} = 3$

យើងបាន
$$\begin{aligned} u_8 &= u_1 \cdot q^{8-1} \\ &= 6 \cdot 3^7 \\ &= 13122 \end{aligned}$$

ដូចនេះ តួទី 8 គឺ $u_8 = 13122$

ខ. សរសេរ រូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 \cdot q^{n-1} \\ &= 6 \cdot 3^{n-1} \\ &= 2 \cdot 3^n \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 2 \cdot 3^n}$

គ. រកតួដែលមានតម្លៃស្មើនឹង 118098

តាង n ជាចំនួនតួដែល $u_n = 118098$

តែ $u_n = 2\cdot 3^n$

យើងបាន $2\cdot 3^n = 118098$

$3^n = 59049 = 3^{10}$

$\Rightarrow n = 10$

ដូចនេះ ចំនួន 118098 នៅតួទី 10

លំហាត់គំរូទី៣ : កំណត់ចំនួនតួនៃស៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម ៖

ក. $1, 2, 4, 8, \ldots, 8192$

ខ. $20, 10, 5, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{5}{256}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $1, 2, 4, 8, \ldots, 8192$

យើងមាន $q = \frac{2}{1} = 2$

តាង n ជាចំនួនតួ ដែល $u_n = 8192$

តែ $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

$= 1\cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

យើងបាន $2^{n-1} = 8192 = 2^{13}$

$n - 1 = 13$

$\Rightarrow n = 14$

ដូចនេះ ស៊ីតធរណីមាត្រ $1, 2, 4, 8, \ldots, 8192$ មាន 14 តួ

ខ. $20, 10, 5, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{5}{256}$

យើងមាន $q = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

តាង n ជាចំនួនតួដែល $u_n = \frac{5}{256}$

តែ $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

$$= 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{20}{2^{n-1}}$$

យើងបាន $\frac{20}{2^{n-1}} = \frac{5}{256}$

$$20 \cdot 256 = 5 \cdot 2^{n-1}$$

$$2^{n-1} = \frac{20 \cdot 256}{5} = 1024 = 2^{10}$$

$$n - 1 = 10$$

$$\Rightarrow n = 11$$

ដូចនេះ ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $20, 10, 5, \frac{5}{2}, \dots, \frac{5}{256}$ មាន 11 តួ

លំហាត់គំរូទី៤ : គេឱ្យស្វ៊ីត(u_n)កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \, , n \in \mathbb{N} \end{cases}$ ។

ក. កំណត់ u_n ដែលជាតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនា u_{11} ។

គ. គណនា p បើ $u_p = 20480$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់ u_n ដែលជាតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $u_{n+1} = 2u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ (ជាចំនួនថេរ)

នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតឌិធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q = 2$

យើងបាន $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-1}$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 5\cdot 2^{n-1}}$

ខ. គណនា u_{11}

យើងមាន $u_n = 5\cdot 2^{n-1}$

$$\Rightarrow u_{11} = 5\cdot 2^{11-1} = 5\cdot 1024 = 5120$$

ដូចនេះ $\boxed{u_{11} = 5120}$

គ. គណនា p

យើងមាន $u_n = 5\cdot 2^{n-1} \Rightarrow u_p = 5\cdot 2^{p-1}$

តែ $u_p = 20480$

យើងបាន $5\cdot 2^{p-1} = 20480$

$$2^{p-1} = 4096 = 2^{12}$$

$$p-1 = 12$$

$$\Rightarrow p = 13$$

ដូចនេះ $\boxed{p = 13}$

☞ **ចំណាំ**

❶ ដើម្បីបង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ យើងត្រូវបង្ហាញថា

$\mathbf{\frac{u_{n+1}}{u_n} = C}$ ដែល **C** ជាចំនួនថេរ

❷ បើយើងដឹង $\mathbf{u_p}$ $(\mathbf{p} \in \mathbb{N})$ នោះយើងអាចគណនា $\mathbf{u_n}$ បានគឺ

$$\mathbf{u_n = u_p \times q^{n-p}}$$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n = u_p \cdot q^{n-p}$

យើងមាន $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ (1)

នោះ $u_p = u_1 \cdot q^{p-1}$ (2)

ធ្វើផលធៀប (1) និង (2) យើងបាន $\frac{u_n}{u_p} = \frac{u_1 \cdot q^{n-1}}{u_1 \cdot q^{p-1}} = q^{n-p}$

$$\Rightarrow u_n = u_p \cdot q^{n-p}$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = u_p \cdot q^{n-p}}$

លំហាត់គំរូទី៥ : គេឱ្យ (u_n) ជាស៊ីតមួយកំណត់ដោយ $u_3 = 27$ និង $u_{n+1} = 3u_n$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ ។

ក. បង្ហាញថា (u_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ។

ខ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (u_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $u_{n+1} = 3u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 3$ ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ (u_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q = 3$

ខ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដោយ (u_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q = 3$

យើងបាន
$$\begin{aligned} u_n &= u_3 \cdot q^{n-3} \\ &= 27 \cdot 3^{n-3} \\ &= 3^3 \cdot 3^{n-3} \\ &= 3^n \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 3^n}$

លំហាត់គំរូទី៦ : គេឱ្យ (u_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ។ បើគេដឹងថា ៖

ក. $u_3 = 18$, $u_7 = 1458$ ។ គណនា q និង u_{10} ។

ខ. $u_3 = 20$, $u_6 = 1280$ ។ គណនា q និង u_1 ។

គ. $u_1 = 3$, $u_3 = 21$ ។ គណនា q ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា q និង u_{10}

យើងមាន $u_3 = 18$, $u_7 = 1458$

យើងបាន $u_7 = u_3 \cdot q^{7-3}$

$1458 = 18 \cdot q^4$

$q^4 = 81$

$\Rightarrow q = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$

- $u_{10} = u_3 \cdot q^{10-3}$

$= 18 \cdot (\pm 3)^7$

$= \pm 39366$

ដូចនេះ $\boxed{q = \pm 3 \ , \ u_{10} = \pm 39366}$

ខ. ចម្លើយគឺ $q = 4$, $u_1 = \frac{5}{4}$

គ. ចម្លើយគឺ $q = \pm\sqrt{7}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គេឱ្យ (u_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែល $\frac{u_8}{u_5} = 8$ ។ គណនាផលធៀបរួម q ។

២. គេឱ្យស៊ីតធរណីមាត្រ $4, 8, 16, \ldots$ ។

ក. កំណត់តួទី៩នៃស៊ីតនេះ ។

ខ. តើចំនួន 16384 ត្រូវជាតួទីប៉ុន្មាននៃស៊ីតនេះ ?

៣. កំណត់ចំនួនតួនៃស្វីតធរណីមាត្រខាងក្រោម៖

ក. $16, 8, 4, \ldots, \frac{1}{32}$

ខ. $1, -4, 16, -64, \ldots, 65536$

៤. គេឱ្យស្វីត (u_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនង $u_1 = 25$ និង $u_{n+1} = 5u_n$, $n \in \mathbb{N}$ ។

ក. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ។

ខ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៥. គេឱ្យ (u_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រដែល $u_3 = \frac{8}{27}$ និង $u_6 = \frac{64}{729}$ ។

គណនា q និង u_1 ។

៦. រកតួទូទៅនៃស្វីតធរណីមាត្រដែល $u_3 = 36$ និង $u_7 = 2916$ ។

៧. គណនាផលបូកស្វីតធរណីមាត្រខាងក្រោម៖

ក. $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \cdots + 1024$

ខ. $\frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \cdots + 96$

៣. ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង

ឧទាហរណ៍៖ គេឱ្យស្វីតធរណីមាត្រ $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ ។ u_1 និង u_6 ហៅថាតួចុង។ u_2 និង u_5 ហើយ u_3 និង $_4$ ហៅថាតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុង។

☞ **បង្ហាញថា $\mathbf{u_1 \times u_6 = u_2 \times u_5 = u_3 \times u_4}$**

សម្រាយ

តាមរូបមន្តតួទី n នៃស្វីតធរណីមាត្រ៖ $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ យើងបាន៖

$$u_1 \times u_6 = u_1 \times (u_1 \cdot q^5) = u_1^2 \cdot q^5 \qquad (1)$$

$$u_2 \times u_5 = (u_1 \cdot q) \times (u_1 \cdot q^4) = u_1^2 \cdot q^5 \qquad (2)$$

$$u_3 \times u_4 = (u_1 \cdot q^2) \times (u_1 \cdot q^3) = u_1^2 \cdot q^5 \qquad (3)$$

តាម (1) , (2) និង (3) យើងបាន $u_1 \times u_6 = u_2 \times u_5 = u_3 \times u_4$

ជាទូទៅ ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង ស្មើនឹងផលគុណតួចុងទាំងពីរ។

គេកំណត់សរសេរ $\mathbf{u_p \times u_{n-p+1} = u_1 \times u_n}$

ឬ បើ $\mathbf{m+n=k+p}$ នោះ $\mathbf{u_m \times u_n = u_k \times u_p}$

ដែល $\mathbf{m,n,k,p}$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ $(\mathbb{N})$ ។

សម្គាល់: ករណីស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន ៖

☞ **ចំនួនតួជាចំនួនសេស**

EX : $u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_5$ យើងបាន $u_1 \times u_5 = u_2 \times u_4 = u_3^2$

☞ **ចំនួនតួជាចំនួនគូ**

EX : $u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_5 , u_6$ យើងបាន $u_1 \times u_6 = u_2 \times u_5 = u_3 \times u_4$

➢ **ករណីពិសេស**

បីចំនួនតគ្នា $\mathbf{a , b , c}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រកាលណា $\mathbf{\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q}$ ថេរ ឬ $\mathbf{b^2 = a \times c}$ ។

($\mathbf{b = \sqrt{a \times c}}$ នោះ $\mathbf{b}$ ហៅថាមធ្យមធរណីមាត្ររវាង $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{c}$)

☞ **ដើម្បីបង្ហាញឱ្យឃើញថា បីចំនួន $\mathbf{a,b,c}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ យើងត្រូវ បង្ហាញថា $\mathbf{\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q}$ ថេរ ឬ $\mathbf{b^2 = a \times c}$ ។**

លំហាត់គំរូទី១ : គេឱ្យបីចំនួន a , b , c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ បង្ហាញថា a^2 , b^2 , c^2 ក៏ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែរ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា a^2 , b^2 , c^2 ក៏ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន a, b, c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះ $b^2 = a \cdot c$

$$\Rightarrow \left(b^2\right)^2 = (a \cdot c)^2$$

$$\Rightarrow \left(b^2\right)^2 = a^2 \cdot c^2$$

នោះ b^2 ជាមធ្យមធរណីមាត្ររវាង a^2 និង c^2 ។

ដូចនេះ បង្ហាញថា a^2 , b^2 , c^2 ក៏ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែរ

លំហាត់គំរូទី២ : តើគេត្រូវបន្ថែមចំនួនប៉ុន្មានទៅលើចំនួន $3, 24, 94$ ដើម្បីឱ្យបីចំនួនតគ្នា ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ?

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនដែលត្រូវបន្ថែម

តាង x ជាចំនួដែលត្រូវបន្ថែមលើ $3, 24, 94$

នោះចំនួនថ្មីគឺ $(3+x), (24+x), (94+x)$

ចំនួនថ្មី: $(3+x), (24+x), (94+x)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រកាលណា:

$$(24+x)^2 = (3+x)\cdot(94+x)$$

$$576 + 48x + x^2 = 282 + 3x + 94x + x^2$$

$$-49x = -294$$

$$\Rightarrow x = 6$$

ដូចនេះ ចំនួនដែលត្រូវបន្ថែមគឺ 6

លំហាត់គំរូទី៣ : រកមធ្យមធរណីមាត្ររវាង 4 និង 9 ។

ដំណោះស្រាយ

តាង x ជាមធ្យមធរណីមាត្ររវាង 4 និង 9 នោះ $x = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$

ដូចនេះ មធ្យមធរណីមាត្ររវាង 4 និង 9 គឺ 6

លំហាត់គំរូទី៤ : គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $u_3 = 4$ និង $u_5 = 36$ ។
គណនា u_1 និង ផលធៀបរួម q ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១

ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុងយើងមាន $u_1 \times u_5 = u_3^2$

នោះ $u_1 = \frac{u_3^2}{u_5} = \frac{4^2}{36} = \frac{4}{9}$

ម្យ៉ាងទៀត $u_5 = u_3 \cdot q^2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{\frac{u_5}{u_3}} = \pm\sqrt{\frac{36}{4}} = \pm 3$

ដូចនេះ $\boxed{u_1 = \frac{4}{5}\ ,\ q = \pm 3}$

របៀបទី២ :

យើងមាន $u_5 = u_3 \cdot q^{5-3}$

$36 = 4 \cdot q^2$

$q^2 = \frac{36}{4} = 9$

$\Rightarrow q = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

ហើយ $u_1 = u_3 \cdot q^{1-3} = 4 \cdot (\pm 3)^{-2} = 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

ដូចនេះ $\boxed{u_1 = \frac{4}{5}\ ,\ q = \pm 3}$

Note : ចំពោះលំហាត់នេះ បើគេឱ្យយើងរក u_1 រួចរក q យើងត្រូវធ្វើតាមរបៀបទី១

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $u_3 = 12$ និង $u_{11} = 3072$ ។គណនា u_7 ។

២. គេឱ្យបីចំនួន a, b, c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក. $\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)=(ab+bc)^2$

ខ. $(ab+bc+ca)^3 = abc(a+b+c)^3$

៣. តើគេត្រូវបន្ថែមចំនួនប៉ុន្មានទៅលើចំនួន $4, 14, 30$ ដើម្បីឱ្យបានបីចំនួនតគ្នា ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ?

៤. បើ $x, 2x+6, 4x+36$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ចូរគណនា x ។

៥. រកតួទី១ (u_1) និង ផលធៀបរួម (q) នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោមៈ

ក. $u_3 = 1$ និង $u_7 = 81$ ។

ខ. $u_3 = 10$ និង $u_6 = 80$ ។

គ. $u_7 = 8u_4$ និង $u_{10} = 1024$ ។

ឃ. $u_2 + u_3 = 9$ និង $u_7 = 27u_4$ ។

៦. កំណត់ផលធៀបរួម (q) និង តួទី១ (u_1) នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រចុះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ បើគេដឹងថា $\begin{cases} u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 84 \end{cases}$ ។

៧. គេឱ្យ a, b, c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាៈ

ក. $\dfrac{1}{a^2}, \dfrac{1}{b^2}, \dfrac{1}{c^2}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

ខ. $\dfrac{1}{a^p}, \dfrac{1}{b^p}, \dfrac{1}{c^p}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

៨. គេឱ្យ $x, 28, y$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ និង $x + y = 119$ ។ គណនា x និង y ។

៤. ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $\mathbf{u_1}$ ជាតួទី១ និង $\mathbf{q}$ ជាផលធៀបរួម $(q \neq 0)$ គឺ $\mathbf{S_n = u_1 \times \dfrac{q^n - 1}{q - 1}}$ ឬ $\mathbf{S_n = u_1 \times \dfrac{1 - q^n}{1 - q}}$

សម្រាយ

របៀបទី១

តាង $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \quad (1)$

គុណ (1) នឹងផលធៀបរួម q

យើងបាន $qS_n = u_1 \cdot q + u_2 \cdot q + u_3 \cdot q + \cdots + u_n \cdot q$

$$= u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_{n+1} \qquad (2)$$

យក $(2)-(1)$ យើងបាន $(q-1)S_n = u_{n+1} - u_1 = u_1 \cdot q^n - u_1 = u_1\left(q^n - 1\right)$

$$\Rightarrow S_n = \frac{u_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$$

ដូចនេះ $\mathbf{S_n = u_1 \times \dfrac{q^n - 1}{q - 1}}$

របៀបទី២

តាង $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

$$= u_1 + (u_1 \cdot q) + (u_1 \cdot q^2) + \cdots + (u_1 \cdot q^{n-1})$$

$$S_n = u_1\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right) \quad (*)$$

គុណអង្គទាំងពីរនៃ $(*)$ នឹង $(1-q)$ យើងបាន:

$$(1-q)S_n = u_1(1-q)\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right) = u_1\left(1 - q^n\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{S_n = \frac{u_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}}$$

លំហាត់គំរូទី១ : គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្ទីតធរណីមាត្រខាងក្រោមៈ

ក. $3+12+48+\cdots$

ខ. $125-25+5+\cdots$

ដំណោះស្រាយ

ក. តាង $S_n=3+12+48+\cdots$

យើងមាន $q=\dfrac{12}{3}=4$

យើងបាន
$$S_n=u_1\frac{q^n-1}{q-1}$$
$$=3\cdot\frac{4^n-1}{4-1}$$
$$=4^n-1$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=4^n-1}$

ខ. តាង $S_n=125-25+5+\cdots$

យើងមាន $q=\dfrac{-25}{125}=-\dfrac{1}{5}$

យើងបាន
$$S_n=u_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$
$$=125\frac{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{5}}$$
$$=125\cdot\frac{5}{6}\left[1-\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right]$$
$$=\frac{625}{6}\left[1-\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right]$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{625}{6}\left[1-\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right]}$

លំហាត់គំរូទី២ : គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $6, 3, 1.5, 0.75, \ldots$ ។

ក. គណនាតួទី៧ ។

ខ. គណនាផលបូក ៧ តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាតួទី៧

យើងមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $6, 3, 1.5, 0.75, \ldots$

នោះ $q = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

យើងបាន $u_7 = u_1 \cdot q^{7-1}$

$= 6 \cdot (0.5)^6$

$= 0.09375$

ដូចនេះ $\boxed{u_7 = 0.09375}$

ខ. គណនាផលបូក ៧ តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ

តាមរូបមន្ត $S_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$

យើងបាន $S_7 = u_1 \cdot \frac{1-q^7}{1-q}$

$= 6 \cdot \frac{1-(0.5)^7}{1-0.5}$

$= \frac{6 \times 0.9921875}{0.5}$

$= 11.90625$

ដូចនេះ $\boxed{S_7 = 11.90625}$

លំហាត់គំរូទី៣ : គណនាផលបូកស៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម :

ក. $48+24+12+\cdots+\frac{3}{8}$

ខ. $2+4+8+\cdots+512$

ដំណោះស្រាយ

ក. $48+24+12+\cdots+\frac{3}{8}$

របៀបទី១

$$S_n = 48+24+12+\cdots+\frac{3}{8}$$

នោះ $q=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$

តាង n ជាចំនួនតួ ដែល $u_n=\frac{3}{8}$

តែ $u_n = u_1\cdot q^{n-1} = 48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{48}{2^{n-1}} = \frac{96}{2^n}$

នោះ $\frac{96}{2^n}=\frac{3}{8}$

$$2^n = \frac{96\times 8}{3} = 256 = 2^8$$

$$\Rightarrow n = 8$$

យើងបាន $S_8 = u_1\frac{1-q^8}{1-q}$

$$= 48\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}} = \frac{765}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{48+24+12+\cdots+\frac{3}{8}=\frac{765}{8}}$

របៀបទី២

នោះ $q=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$

ហើយ $u_n=\frac{3}{8}\Rightarrow u_{n+1}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

យើងបាន $S_n=\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{u_1-u_{n+1}}{1-q}$

$$=\frac{48-\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{765}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{48+24+12+\cdots+\frac{3}{8}=\frac{765}{8}}$

ខ. $2+4+8+\cdots+512$

របៀបទី១

$S_n=2+4+8+\cdots+512$

នោះ $q=\frac{4}{2}=2$

តាង n ជចំនួនតួ ដែល $u_n=512$

តែ $u_n=u_1\cdot q^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

នោះ $2^n=512=2^9\quad\Rightarrow n=9$

យើងបាន $S_8=u_1\frac{1-q^8}{1-q}$

$$=2\cdot\frac{2^9-1}{2-1}=1022$$

ដូចនេះ $\boxed{2+4+8+\cdots+512=1022}$

របៀបទី២

$S_n = 2+4+8+\cdots+512$

នោះ $q=\dfrac{4}{2}=2$ ហើយ $u_n=512 \Rightarrow u_{n+1}=512\cdot 2=1024$

យើងបាន $S_n=\dfrac{u_1(q^n-1)}{q-1}=\dfrac{u_{n+1}-u_1}{q-1}$

$=\dfrac{1024-2}{2-1}=1022$

ដូចនេះ $\boxed{2+4+8+\cdots+512=1022}$

លំហាត់គំរូទី៤ : គណនា

ក. $S_n = 9+99+999+\cdots+\underbrace{999\ldots9}_{n\text{ ដងលេខ } 9}$

ខ. $S_n = 7+77+777+\cdots+\underbrace{777\ldots7}_{n\text{ ដងលេខ } 7}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $S_n = 9+99+999+\cdots+\underbrace{999\ldots9}_{n\text{ ដងលេខ } 9}$

$=(10-1)+\left(10^2-1\right)+\left(10^3-1\right)+\cdots+\left(10^n-1\right)$

$=\left(10+10^2+10^3+\cdots+10^n\right)-(1+1+1+\cdots+1)$

$=10\cdot\dfrac{10^n-1}{10-1}-n$

$=\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{9}$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 9+99+999+\cdots+\underbrace{999\ldots9}_{n\text{ ដងលេខ } 9}=\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{9}}$

ខ. $S_n = 7 + 77 + 777 + \cdots + \underbrace{777\ldots7}_{n\text{ដងលេខ }7}$

$$= \frac{7}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{999\ldots9}_{n\text{ដងលេខ }9})$$

$$= \frac{7}{9}\Big[(10-1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \cdots + (10^n - 1)\Big]$$

$$= \frac{7}{9}\Big[(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n) - (1 + 1 + 1 + \cdots + 1)\Big]$$

$$= \frac{7}{9}\left(10 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n\right)$$

$$= \frac{7}{9} \cdot \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$$

$$= \frac{7}{81}\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)$$

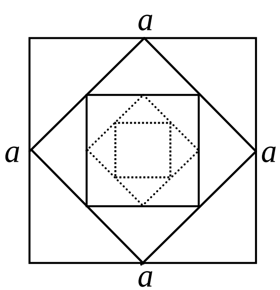
ដូចនេះ $\boxed{S_n = 7 + 77 + 777 + \cdots + \underbrace{777\ldots7}_{n\text{ដងលេខ }7} = \frac{7}{81}\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)}$

លំហាត់គំរូទី៥ : គេឱ្យការេមួយដែលមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើនឹង a ។ គេសង់ការេមួយទៀតមានកំពូលជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃការេមុន។ គេសង់ការេរបៀបនេះរហូតដល់ n ការេ។

ក. គណនាផ្ទៃក្រឡាការេទី n ។

ខ. គណនាផលបូកផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់ ។

ដំណោះស្រាយ



ក. គណនាផ្ទៃក្រឡាការេទី n

តាង $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃការេទាំងនោះ ហើយ តាង $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃការេទាំងនោះ

យើងបាន
- $d_1 = a \Rightarrow A_1 = d_1^2 = a^2$
- $d_2 = \left(\frac{a}{2}\right)\sqrt{2} \Rightarrow A_2^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$
- $d_3 = \left(\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow A_3^2 = \frac{a^2}{4}$

....

....

នោះ $(A_n): A_1 , A_2 , A_3 , \ldots$ ដែល $A_1 = a^2 , A_2 = \frac{a^2}{2} , A_3 = \frac{a^2}{4} , \ldots$

ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q = \frac{1}{2}$

យើងបាន $A_n = A_1 \cdot q^{n-1}$

$$= a^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{a^2}{2^{n-1}}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាការេទី n គឺ $\boxed{A_n = \frac{a^2}{2^{n-1}}}$

ខ. គណនាផលបូកផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់

តាង S_n ជាផលបូកផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់

យើងបាន $S_n = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$

$$= A_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= a^2 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{a^2(2^n-1)}{2^{n-1}}$$

ដូចនេះ ផលបូកផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់គឺ $\boxed{S_n = \frac{a^2(2^n-1)}{2^{n-1}}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម៖

ក. $\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ខ. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+\cdots$

២. គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $1,-2,4,-8,\ldots$ ។

ក. គណនាតួទី 11 ។

ខ. គណនាផលបូក 11 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

៣. គណនាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម៖

ក. $100+50+25+\cdots+\frac{25}{16}$

ខ. $-100+50-25+\cdots+\frac{25}{128}$

៤. គណនាផលបូកខាងក្រោម៖

ក. $S_n = 8+88+888+\cdots+\underbrace{888\ldots8}_{n\text{ដងលេខ8}}$

ខ. $18+198+1998+19998+\cdots+1999\ldots998$, $(n-1)$ដងលេខ8

គ. $S_n = 25 + 2525 + 252525 + \cdots + \underbrace{252525\ldots25}_{25\text{ចំនួន } n \text{ ដង}}$

ឃ. $2013 + 20132013 + 201320132013 + \cdots + \underbrace{201320132013\ldots2013}_{2013\text{ចំនួន } n \text{ ដង}}$

៥. គណនាផលបូកស៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 8 + 4\cdot 16 + \cdots + n\cdot 2^n$

ខ. $T_n = 2 + 4x + 6x^2 + 8x^3 + \cdots + 2nx^{n-1}$

៦. គេមានការេមួយដែលជ្រុងវាមានរង្វាស់ $8cm$ ។ គេសង់ការេមួយទៀតដែលកំពូលវាជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃនៃជ្រុងការេមុន។ គេសង់ការេបន្តបន្ទាប់របៀបនេះ រហូតបានការេ 8 ។

ក. គណនាប្រវែងជ្រុងទីមួយនៃការេទាំងនោះ ។

ខ. គណនាផលបូកវិមាត្រនៃការេទាំងអស់ ។

គ. គណនាផលបូកផ្ទៃក្រឡានៃការេទាំងអស់ ។

៥. ស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

យើងមាន $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

នោះផលបូកអនន្តតួកំណត់ដោយ $S_\infty = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$

ដោយ $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{u_1}{1-q} - \dfrac{u_1 q^n}{1-q}$

❶ បើ $|q| < 1$ នោះ $q^n \to 0$ កាលណា $n \to \infty$

នោះ $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{u_1}{1-q} - \dfrac{u_1 q^n}{1-q}$

$\Rightarrow S_\infty = \dfrac{u_1}{1-q} - \dfrac{u_1\cdot 0}{1-q} = \dfrac{u_1}{1-q}$

❷ បើ $|q| > 1$ នោះ $q^n \to \infty$ កាលណា $n \to \infty$

នោះ S_∞ មិនកំណត់

❸ បើ $q=\pm 1$ នោះ $\left[\begin{array}{l} S_\infty = u_1+u_1+u_1+u_1+\cdots \\ S_\infty = u_1-u_1+u_1-u_1+\cdots \end{array}\right.$ មិនកំណត់

ជាទូទៅ

- **បើ $|q|<1$ នោះផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ កំណត់ដោយ: $\mathbf{S_\infty = \dfrac{u_1}{1-q}}$**
- **បើ $|q|\geq 1$ នោះ S_∞ មិចអាចកំណត់បាន**

លំហាត់គំរូទី១ : គណនាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $16+12+9+\cdots$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $u_1=16$ ហើយ $q=\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{4}<1$

យើងបាន $S_\infty=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{16}{1-\dfrac{3}{4}}=64$

ដូចនេះ $\boxed{S_\infty=64}$

លំហាត់គំរូទី២ : គណនាផលផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $3+\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{16}+\cdots$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $u_1=3$ ហើយ $q=\dfrac{3}{4}\div 3=\dfrac{1}{4}<1$

យើងបាន $S_\infty=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{3}{1-\dfrac{1}{4}}=4$

ដូចនេះ $\boxed{S_\infty=4}$

លំហាត់គំរូទី៣ : គណនាផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ ដែលមាន $u_1 = 5$ និង $S_\infty = 15$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $u_1 = 5$ និង $S_\infty = 15$

តាម ផលបូកស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $S_\infty = \dfrac{u_1}{1-q}$

យើងបាន $15 = \dfrac{5}{1-q}$

$$15 - 15q = 5$$

$$-15q = -10$$

$$q = \frac{-10}{-15} = \frac{2}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{q = \dfrac{2}{3}}$

លំហាត់គំរូទី៤ : សរសេរចំនួនទសភាគខួបខាងក្រោមជាទម្រង់ប្រភាគ $\dfrac{a}{b}$ ៖

ក. $0.\overline{7}$ ខ. $2.\overline{34}$ គ. $0.\overline{235}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $0.\overline{7} = 0.7777777\ldots \quad = 0.7 + 0.07 + 0.007 + \cdots$

ជាផលបូកតួនៃស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមាន $u_1 = 0.7 = \dfrac{7}{10}$

និង $q = 0.1 = \dfrac{1}{10}$

តាមរូបមន្ត $S_\infty = \dfrac{u_1}{1-q}$ យើងបាន $0.\overline{7} = \dfrac{7}{10} \div \left(1 - \dfrac{1}{10}\right) = \dfrac{7}{9}$

ដូចនេះ $\boxed{0.\overline{7} = \dfrac{7}{9}}$

របៀបម្យ៉ាងទៀត

តាង $N = 0.\overline{7} = 0.7777\ldots \quad (1)$

គុណ (1) នឹង 10 យើងបាន $10N = 7.7777\ldots \quad (2)$

យក $(2)-(1)$ យើងបាន $9N = 7 \Rightarrow N = \dfrac{7}{9}$

ដូចនេះ $\boxed{0.\overline{7} = \dfrac{7}{9}}$

ខ. $2.\overline{34} = 2 + 0.\overline{34} = 2 + 0.34 + 0.0034 + 0.000034 + \ldots$

$$= 2 + \frac{0.34}{1-0.01} = 2 + \frac{0.34}{0.99}$$

$$= 2 + \frac{34}{99}$$

$$= \frac{232}{99}$$

ដូចនេះ $\boxed{2.\overline{34} = \dfrac{232}{99}}$

របៀបម្យ៉ាងទៀត

តាង $N = 2.\overline{34} = 2.343434\ldots \quad (1)$

នោះ $100N = 234.343434\ldots \quad (2)$

យក $(2)-(1)$ យើងបាន $99N = 232 \Rightarrow N = \dfrac{232}{99}$

ដូចនេះ $\boxed{2.\overline{34} = \dfrac{232}{99}}$

គ. $0.\overline{235} = 0.235235235 = 0.235 + 0.000235 + 0.000000235 + \ldots$

$$= \frac{0.235}{1-0.001} = \frac{0.235}{0.999} = \frac{235}{999}$$

ដូចនេះ $\boxed{0.\overline{235}=\dfrac{235}{999}}$

របៀបម៉្យាងទៀត

តាង $N=0.\overline{235}=0.235235235\ldots \qquad (1)$

នោះ $1000N=235.235235235\ldots \qquad (2)$

យក $(2)-(1)$ យើងបាន $999N=235\Rightarrow N=\dfrac{235}{999}$

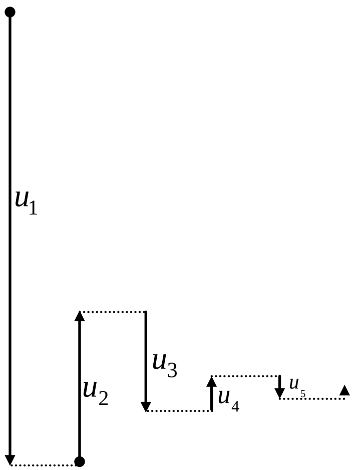
ដូចនេះ $\boxed{0.\overline{235}=\dfrac{235}{999}}$

លំហាត់គំរូទី៥ : បុរសម្នាក់បានលោតពីលើស្ពានដោយចងខ្សែពួរទៅនឹងជើងរបស់គាត់ប្រវែង $120\,m$ ហើយយឺតឡើងមកវិញបាន $\dfrac{1}{3}$ នៃប្រវែងដើម។ រាល់ពេលដែលយឺតឡើង វាធ្លាក់ចុះមកវិញបាន $\dfrac{2}{3}$ នៃប្រវែងដែលយឺតតឡើង។ គណនាប្រវែងខ្សែសរុបចាប់តាំងពីគាត់លោតចុះ រហូតដល់ខ្សែមានលំនឹង។

ដំណោះស្រាយ

គណនាប្រវែងខ្សែសរុបចាប់តាំងពីគាត់លោតចុះ រហូតដល់ខ្សែមានលំនឹង

តាមបំរាប់ យើងបាន:



- $u_1=120$
- $u_2=\dfrac{1}{3}u_1$
- $u_3=\dfrac{2}{3}u_2=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}u_1=\dfrac{2}{3^2}u_1$
- $u_4=\dfrac{1}{3}u_3=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3^2}u_1=\dfrac{2}{3^3}u_1$

- $u_5 = \frac{2}{3}u_4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3^3}u_1 = \frac{2^2}{3^4}u_1$
- $u_6 = \frac{1}{3}u_5 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2^2}{3^4}u_1 = \frac{2^2}{3^5}u_1$
- $u_7 = \frac{2}{3}u_6 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2^2}{3^5}u_1 = \frac{2^3}{3^6}u_1$
- $u_8 = \frac{1}{3}u_7 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2^3}{3^6}u_1 = \frac{2^3}{3^7}u_1$

 ....

 ....

តាង S ជាប្រវែងខ្សែសរុបនៃការធ្លាក់ចុះ និង យឺតឡើង

យើងបាន:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + \ldots$$
$$= u_1 + \frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3^2}u_1 + \frac{2}{3^3}u_1 + \frac{2^2}{3^4}u_1 + \frac{2^2}{3^5}u_1 + \frac{2^3}{3^6}u_1 + \frac{2^3}{3^7}u_1 + \ldots$$
$$= u_1\left[\left(1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^4} + \frac{2^3}{3^6} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^3} + \frac{2^2}{3^5} + \frac{2^3}{3^7} + \cdots\right)\right]$$
$$= u_1\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3^2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3^2}}\right)$$
$$= u_1\left(\frac{9}{7} + \frac{3}{7}\right)$$
$$= \frac{12u_1}{7}$$
$$= \frac{12\times 120}{7} = \frac{1440}{7} = 205.71$$

ដូចនេះ ប្រវែងខ្សែសរុបចាប់តាំងពីគាត់លោតចុះ រហូតដល់ខ្សែមានលំនឹង

គឺ $\boxed{S = 205.71m}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គណនាផលបូកនៃស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ ដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

ក. $\frac{9}{4}+\frac{3}{2}+1+\cdots$ ខ. $100+50+25+\cdots$

គ. $-20+10-5+\cdots$ ឃ. $12+4+\frac{4}{3}+\cdots$

២. គណនាផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមាន៖

ក. $u_1=8$ និង $S_\infty=10$ ខ. $u_1=4$ និង $S_\infty=12$

៣. សរសេរចំនួនទសភាគខួបខាងក្រោមជាប្រភាគសនិទាន $\frac{a}{b}$

ក. $0.\overline{5}$ ខ. $0.\overline{50}$

គ. $0.4\overline{52}$ ឃ. $0.2\overline{35}$

៤. រកតួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមានផលធៀបរួម $q=\frac{3}{5}$ និង ផលបូកអនន្តតួ $S_\infty=40$ ។

៥. ផលបូ២ តួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រស្មើនឹង 9 ហើយផលបូកអនន្តតួនៃស៊ីតធរណីមាត្រនេះស្មើនឹង 25 ។ បើស៊ីតធរណីមាត្រនេះមានផលធៀបរួម r ជាចំនួនវិជ្ជមាន គណនា r និង តួដំបូង ។

៦. គេសង្កេតមុខនាឡិកាមួយ ។ នៅពេលទ្រនិចម៉ោង និង ទ្រនិចនាទីកំពុងតែត្រួតស៊ីគ្នា កំណត់រយៈពេលដែលទ្រនិចទាំងពីរជួបគ្នាលើកទី២ ។

៧. បាល់មួយត្រូវបានគេទម្លាក់ពីកម្ពស់ $12m$ ។ រាល់ពេលដែលវាធ្លាក់ទៅប៉ះដី បាល់នោះលោតឡើងវិញបានកម្ពស់ $\frac{3}{4}$ នៃកម្ពស់ដែលវាធ្លាក់។ គណនាប្រវែងសរុប ដែលបាល់លោតចុះឡើង ដោយគិតចាប់តាំងពីបាល់ធ្លាក់ចុះ រហូតដល់វាមានលំនឹង។

លំហាត់

១. រកតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម :

ក. $125\,,25\,,5\,,\ldots$ ខ. $-3\,,9\,,-27\,,\ldots$

២. គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $2\,,6\,,18\,,\ldots$ ។

ក. គណនាតួទី៨ នៃស្វ៊ីតនេះ ។

ខ. តើចំនួន 486 ត្រូវជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតនេះ ?

៣. រកចំនួនតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម :

ក. $2\,,4\,,8\,,\ldots\,,512$ ខ. $81\,,27\,,9\,,\ldots\,,\frac{1}{27}$

៤. គេឱ្យ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ បើគេដឹងថា :

ក. $U_3=18$, $U_7=1458$ ។ គណនា q និង U_{10} ។

ខ. $U_1=3$, $S_3=21$ ។ គណនា q និង S_7 ។

៥. គណនាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម :

ក. $48+24+12+\ldots+\frac{3}{8}$ ខ. $9-6+4-\ldots-\frac{128}{243}$

គ. $100+50+25+\ldots+\frac{25}{16}$ ឃ. $\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ង. $\frac{1}{3}+1+3+\ldots+6561$ ច. $-100+50-25+\ldots+\frac{25}{128}$

ឆ. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{2^5}+\ldots-\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}$

៦. គណនាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមាន $U_2=-9$ និង $U_5=\frac{1}{3}$

៧. គណនាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមាន $U_1=5$ និង $S_\infty=15$

៨. ផលបូកពីរតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើនឹង 9 និងផលបូកស្វ៊ីត ធរណី-មាត្រ អនន្តតួស្មើនឹង 25 ។ គណនា q និង U_1 បើផលធៀបរួម $q>0$ ។

៩. តួទី៣ នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើនឹង 3 និង តួទី៦ ស្មើនឹង $\frac{3}{8}$ ។

គណនាផលធៀបរួម និង ផលបូក ៨ តួដំបូង ។

១០. គណនា a ដើម្បីឱ្យចំនួន $(a-3)$, $(a+1)$, $(4a-2)$ ជាបីតួតគ្នា នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

១១. ក. ដោះស្រាយសមីការ $3x^2-8x+4=0 \quad (E)$ ក្នុងសំណុំ $\mathbb{R}$ ។

ខ. គេមាន $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រកើនដែលមាន U_3 និង U_4 នៃស្វ៊ីតនេះជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

a) ទាញរកផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតនេះ ។

b) គណនាតួទីមួយ (U_1) នៃស្វ៊ីតនេះ ។

១២. គេឱ្យ (U_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $U_3=12$ និង $U_{11}=3072$ ។ គណនា U_7 ។

១៣. គណនាតួទី១ (U_1) និងផលធៀបរួម (q) នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោមៈ

ក. $U_3=10$ និង $U_6=80$ ខ. $U_7=8U_4$ និង $U_{10}=1024$

គ. $U_2+U_3=9$ និង $U_7=27U_4$ ឃ. $U_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

១៤. បើ x , $2x+6$, $4x+36$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ចូរគណនា x ។

១៥.គេមាន $x,28,y$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ និង $x+y=119$ ។ គណនា x និង y ។

១៦ រកបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ដែលមានផលបូកបីតួនេះស្មើ 26 ហើយផលគុណរបស់វាស្មើ 216 ។

១៧. រកពីរចំនួនខុសគ្នា a និង b ដែល a , b , 10 បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនពន្ត ហើយ b , a , 10 បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

១៨.ផលគុណបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយស្មើ 216 ហើយផលបូកបីតួដំបូងនេះស្មើ 21 ។ រកបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ បើគេដឹងថា ផលធៀបរួមរបស់វាតូចជាង 1 ។

មេរៀនទី ៤ ផលបូកតួនៃស៊ីតផ្សេងៗ

១. របៀបគណនាផលបូក

លំហាត់គំរូទី១ : គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម:

ក. $1+2+3+...+n$

ខ. $1^2+2^2+3^2+...n^2$

គ. $1^3+2^3+3^3+...+n^3$

ដំណោះស្រាយ

ក. តាង $S_n=1+2+3+...+(n-2)+(n-1)+n \quad (1)$

ឬ $S_n=n+(n-1)+(n-2)+...+3+2+1 \quad (2)$

$(1)+(2)$ យើងបាន៖

$$2S_n=\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+...+(n+1)}_{n\text{ តួនៃ}(n+1)}=n(n+1)$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}}$

ខ. តាង $S_n=1^2+2^2+3^2+...+n^2$

យើងមាន $(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$

$\Leftrightarrow 3k^2=(k+1)^3-k^3-3k-1$

យក $k=1,2,3,...,n$ យើងបាន :

$$+\begin{cases} k=1 \Rightarrow 3\cdot 1^2 = 2^3 - 1^3 - 3\cdot 1 - 1 \\ k=2 \Rightarrow 3\cdot 2^2 = 3^3 - 2^3 - 3\cdot 2 - 1 \\ k=3 \Rightarrow 3\cdot 3^2 = 4^3 - 3^3 - 3\cdot 3 - 1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ k=n \Rightarrow 3\cdot n^2 = (n+1)^3 - n^3 + 3\cdot n - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3S_n &= (n+1)^3 - 1^3 - 3(1+2+3+\ldots+n) - n \\ &= (n+1)^3 - 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\ &= \frac{(n+1)}{2}\left[2(n+1)^2 - 3n - 2\right] \\ &= \frac{(n+1)}{2}(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2) \\ &= \frac{(n+1)}{2}(2n^2 + n) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

គ. តាង $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

យើងមាន $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

$$\Leftrightarrow 4k^3 = (k+1)^4 - k^4 - 6k^2 - 4k - 1$$

យក $k = 1 , 2 , 3 , \ldots , n$ យើងបាន :

$$+\begin{cases} k=1 \Rightarrow\ 4\cdot1^3 = 2^4-1^4-6\cdot1^2-4\cdot1-1 \\ k=2 \Rightarrow\ 4\cdot2^3 = 3^4-2^4-6\cdot2^2-4\cdot2-1 \\ k=3 \Rightarrow\ 4\cdot3^3 = 4^4-3^4-6\cdot3^2-4\cdot3-1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ k=n \Rightarrow 4\cdot n^3 = (n+1)^4-n^4-6\cdot n^2-4\cdot n-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4S_n &= (n+1)^4-1^4-6(1^2+2^2+3^2+...+n^2)-4(1+2+3+...+n)-n \\ &= (n+1)^4-6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}-(n+1) \\ &= (n+1)\left[(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\right] \\ &= (n+1)(n^3+3n^2+3n+1-2n^2-n-2n-1) \\ &= (n+1)(n^3+n^2) \\ &= n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

ដូចនេះ $\boxed{1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$

លំហាត់គំរូទី២ : គណនាផលបូកតួនៃស្ទីតខាងក្រោមៈ

ក. $11^2+12^2+13^2+...+100^2$

ខ. $12^3+13^3+14^3+...+50^3$

គ. $2000^2-1999^2+1998^2-1997^2+...+2^2-1^2$

ដំណោះស្រាយ

ក. តាង $S=11^2+12^2+13^2+...+100^2$ យើងបាន :

$$S=\underbrace{(1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2)+11^2+12^2+13^2+\ldots+100^2}_{100\text{តួ}}$$

$$-(\underbrace{1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2}_{10\text{តួ}})$$

$$=\frac{100(100+1)(2\cdot 100+1)}{6}-\frac{10(10+1)(2\cdot 10+1)}{6}$$

$$=\frac{100\cdot 101\cdot 201-10\cdot 11\cdot 21}{6}$$

$$=337965$$

ដូចនេះ $\boxed{11^2+12^2+13^2+\ldots+100^2=337965}$

ខ. $\mathbf{12^3+13^3+14^3+\ldots+50^3}$

តាង $S=12^3+13^3+14^3+\ldots+50^3$ យើងបាន :

$$S=\underbrace{(1^3+2^3+3^3+\ldots+11^3)+12^3+13^3+14^3+\ldots+50^3}_{50\text{តួ}}$$

$$-(\underbrace{1^3+2^3+3^3+\ldots+11^3}_{11\text{តួ}})$$

$$=\left[\frac{50(50+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{11(11+1)}{2}\right]^2$$

$$=1625625-4356=1621269$$

ដូចនេះ $\boxed{12^3+13^3+14^3+\ldots+50^3=1621269}$

គ. $\mathbf{2000^2-1999^2+1998^2-1997^2+\ldots+2^2-1^2}$

តាង $S=2000^2-1999^2+1998^2-1997^2+\ldots+2^2-1^2$ យើងបាន

$$S=\left[(2000-1999)(2000+1999)\right]+\left[(1998-1997)(1998+1997)\right]$$

$$+\ldots+\left[(2-1)(2+1)\right]$$

$$=2000+1999+1998+1997+\ldots+2+1$$

$$=\frac{2000(2000+1)}{2}=2001000$$

ដូចនេះ

$$\boxed{2000^2-1999^2+1998^2-1997^2+...+2^2-1^2=2001000}$$

លំហាត់គំរូទី៣: គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម:

ក. $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$

ខ. $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

គ. $\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\frac{1}{3\times 4\times 5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$

យើងមាន $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ ជំនួស $k=1\,,\,2\,,\,3\,,\,...\,n$ យើងបាន :

$$+\begin{cases}\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\ \dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\end{cases}$$

$$S_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}}$

ចំណាំ $$\mathbf{\frac{1}{a\times b}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

ខ. $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

យើងមាន $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

ជំនួស $k=1,2,3,...,n$ យើងបាន :

$$+\begin{cases}\frac{1}{1\times 3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)\\ \frac{1}{3\times 5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\\ \frac{1}{5\times 7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\end{cases}$$

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}}$

គ. $\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\frac{1}{3\times 4\times 5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

យើងមាន $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

ជំនួស $k=1,2,3,..,n$ យើងបាន :

$$+\begin{cases}\frac{1}{1\times 2\times 3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3}\right)\\ \frac{1}{2\times 3\times 4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{3\times 4}\right)\\ \frac{1}{3\times 4\times 5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\times 4}-\frac{1}{4\times 5}\right)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\end{cases}$$

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{(n+1(n+2)}\right]=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

ដូចនេះ

$$\boxed{\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\frac{1}{3\times 4\times 5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. ក. គេឱ្យស្ទីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ។

a) គណនា S_n ដែលជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្ទីតនេះ។

b) គណនផលបូក 39999 តួដំបូងនៃស្ទីតនេះ។

ខ. គណនា $S_n = \frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$

២. គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $\frac{1}{1\times 5} + \frac{1}{5\times 9} + \frac{1}{9\times 13} + ... + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

ខ. $\frac{1}{1\times 4} + \frac{1}{4\times 7} + \frac{1}{7\times 10} + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

គ. $\frac{1}{1\times 4} + \frac{1}{2\times 5} + \frac{1}{3\times 6} + ... + \frac{1}{n(n+3)}$

៣. គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $1, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, ..., \frac{1}{1+2+3+...+n}$

ខ. $\frac{1}{(1\times 3)^2}, \frac{2}{(3\times 5)^2}, \frac{3}{(5\times 7)^2}, ..., \frac{n}{[(2n-1)(2n+1)]^2}$

៤. គណនា S_n បើ៖ ក. $a_n = \sqrt{(2n+1) - 2\sqrt{n^2+n}}$

ខ. $a_n = \frac{n}{(n+1)!}$

២. គណនាផលបូកតាមគំរូ

លំហាត់ទី១ : គេឱ្យលំនាំគំរូ :

$$1 = 1^2$$
$$1+3 = 2^2$$
$$1+3+5 = 3^2$$
$$1+3+5+7 = 4^2$$
$$1+3+5+7+9 = 5^2$$

តាមលំនាំគំរូនេះ ចូរគណនា ផលបូក $1+3+5+7+...+2013$

លំហាត់ទី២ : គេឱ្យលំនាំគំរូនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម

$$1=1$$
$$1+7=8$$
$$1+7+19=27$$
$$1+7+19+37=64$$
$$1+7+19+37+61=125$$

តាមលំនាំគំរូនេះ ចូរគណនាផលបូក នៃស្វ៊ីតនេះដែលមាន 10 តួ ។

លំហាត់ទី៣ : គេឱ្យលំនាំគំរូ :

$$1\times 8+1=9$$
$$12\times 8+2=98$$
$$123\times 8+3=987$$
$$1234\times 8+4=9876$$

តាមលំនាំគំរូនេះ ចូរគណនា $123456789\times 8+9$

លំហាត់ទី៤ : គេឱ្យ :

$$a+4b+9c+16d+25e+36f+49g=1$$
$$4a+9b+16c+25d+36e+49f+64g=12$$
$$9a+16b+25c+36d+49e+64f+81g=123$$

ចូរគណនា តម្លៃនៃ $16a+25b+36c+49d+64e+81f+100g$

៣. និមិត្តសញ្ញា Σ សម្រាប់ផលបូកតួនៃស្វ៊ីត

៣.១ សញ្ញាណ Σ (summation or Sigma Notation)

$$\mathbf{u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k}$$

ឧទាហរណ៍ : ក. $1+2+3+...+n=\sum_{k=1}^{n}k$

ខ. $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$

គ. $1^2+2^3+3^3+...+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3$

ឃ. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2013}=\sum_{k=1}^{2013}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{k}$

លំហាត់ ៖ សរសេរផលបូកខាងក្រោមដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញា Σ

ក. $2+5+...+(3n-1)$ ខ. $3+6+12+...+3\cdot 2^{n-1}$

គ. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{100}$

ឃ. $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+...+2012\cdot 6035$

ង. $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+...+\frac{1}{9999}$ ។

៣.២ លក្ខណះនៃ Σ

ក. $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ ខ. $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

គ. $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ ឃ. $\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k\neq\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k$

ង. $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k}\right)\neq\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}$

ច. $\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2\pm 2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2$

កំណត់ចំណាំ

- $\sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{m}^{n} a_k = \sum_{1}^{n} a_k$ ឬ $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k$
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
- $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$
- $\sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{a(a^n-1)}{a-1} = \frac{a}{a-1}(a^n-1)$

លំហាត់គំរូ : គណនាផលបូកខាងក្រោម៖

ក. $\sum_{k=1}^{20}(3k+1)$ ខ. $\sum_{k=1}^{7} 2^k$

គ. $\sum_{k=4}^{14}(4k-3)$ ឃ. $\sum_{k=1}^{30} k(k+1)$

ដំណោះស្រាយ

ក. $$\sum_{k=1}^{20}(3k+1) = 3\sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 1$$

$$= 3\cdot\frac{20(20+1)}{2} + 20$$

$$= 650$$

ដូចនេះ $$\boxed{\sum_{k=1}^{20}(3k+1) = 650}$$

ខ. $\sum_{k=1}^{7} 2^k = \frac{2(2^7-1)}{2-1} = 2(128-1) = 254$

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{k=1}^{7} 2^k = 254}$

គ. $\sum_{k=4}^{14}(4k-3) = \sum_{k=1}^{14}(4k-3) - \sum_{k=1}^{3}(4k-3)$

$$= \left(4\sum_{k=1}^{14} k - \sum_{k=1}^{14} 3\right) - \left(4\sum_{k=1}^{3} k - \sum_{k=1}^{3} 3\right)$$

$$= \left[4 \cdot \frac{14(14+1)}{2} - 3\cdot 14\right] - \left[4\cdot\frac{3(3+1)}{2} - 3\cdot 3\right]$$

$$= 420 - 42 - 24 + 9$$

$$= 363$$

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{k=4}^{14}(4k-3) = 363}$

ឃ. $\sum_{k=1}^{30} k(k+1) = \sum_{k=1}^{30} k^2 + \sum_{k=1}^{30} k$

$$= \frac{30(30+1)(2\cdot 30+1)}{6} + \frac{30(30+1)}{2}$$

$$= 9455 + 465$$

$$= 9920$$

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{k=1}^{30} k(k+1) = 9920}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

ក. គណនា $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$

ខ. គណនា $S_n = 1+3+7+\cdots+(n^2-n+1)$

គ. គណនា $S_n = 1+15+65+\cdots+(4n^3-6n^2+4n-1)$

ឃ. គណនា $S_n = 5+35+113+\cdots+(4n^3+2n-1)$

៤. របៀបកំណត់តួទី n តាមផលសងតួនៃស្វ៊ីត

៤.១ ផលសងតួលំដាប់ទី១

គេឱ្យស្វ៊ីត $(a_n): a_1\,,a_2\,,a_3\,,\ldots a_{n-1}\,,a_n$

តាង $(b_n): a_2-a_1\,,a_3-a_2\,,a_4-a_3\,,\ldots a_n-a_{n-1}$ ជាផលសងតួលំដាប់ទី១ នៃស្វ៊ីត(a_n) នោះ $b_n = a_{n+1}-a_n$ យើងបាន:

$$\begin{aligned}
a_2-a_1 &= b_1\\
a_3-a_2 &= b_2\\
a_4-a_3 &= b_3\\
\vdots \quad\ \vdots\ \ &\quad \vdots\\
a_n-a_{n-1} &= b_{n-1}\\
\hline
a_n-a_1 &= b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad \Rightarrow a_n = a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k
\end{aligned}$$

ជាទូទៅ: គេមានស្វ៊ីត $(a_n): a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots,a_n$ ។ ស្វ៊ីត (b_n) កំណត់ដោយ $(b_n): b_1,b_2,b_3,\ldots,b_{n-1}$ ដែល $b_1=a_2-a_1, b_2=a_3-a_2,\ b_3=a_4-a_3,\ldots,$ $b_{n-1}=a_n-a_{n-1}$ ហៅថាផលសងនៃស្វ៊ីតលំដាប់១នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

នោះតួទូទៅ ស្វ៊ីត(a_n)កំណត់ដោយ $\mathbf{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k}$ ចំពោះ $n \ge 2$ ។

គួរចងចាំ

- $\sum_{k=1}^{n-1} c = c(n-1)$
- $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2$

លំហាត់គំរូទី១ : កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $2,4,8,14,22,32,\ldots$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីតដែលត្រូវរក

នោះ $(a_n): 2,4,8,14,22,32,\ldots$

តាង ស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល $b_n = a_{n+1} - a_n$

យើងបាន $(b_n): 2,4,6,8,\ldots$

នោះ ស្វ៊ីត (b_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី១ស្មើ 2 និងផលសងរួមស្មើ 2

យើងបាន $b_n = 2 + (n-1)2 = 2n$, $\forall n \geq 2$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

$$= 2 + 2\frac{(n-1)\left[(n-1)+1\right]}{2}$$

$$= n^2 - n + 2$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់: ចំពោះ $n=1, a_1 = 1^2 - 1 + 2 = 2$ ពិត

ដូច្នេះស្វ៊ីត តួទី n នៃស្វ៊ីត $2,4,8,14,22,32,\ldots$ គឺ $\boxed{a_n = n^2 - n + 2}$

លំហាត់គំរូទី២ : កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $4\,,5\,,7\,,10\,,14\,,\ldots$ រួចគណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $(a): 4, 5, 7, 10, 14, \ldots$

តាង (b_n) ជាផលសងតួលំដាប់ទី១ នៃស្វ៊ីត(a_n) ដែល $b_n = a_{n+1} - a_n$

យើងបាន $(b_n): 1, 2, 3, 4, \ldots$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d = 1$

$$\Rightarrow b_n = n$$

យើងបាន
$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 4 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 4 + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2 - n + 8}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{a_n = \dfrac{n^2 - n + 8}{2}}$

គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2 - k + 8}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 4 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 4n \\ &= \frac{n}{12} \left[(n+1)(2n+1) - 3(n+1) + 48 \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{n}{12}\left(2n^2 + n + 2n + 1 - 3n - 3 + 48\right)$$
$$= \frac{n}{12}\left(2n^2 + 46\right)$$
$$= \frac{n(n+23)}{6}$$

ដូចនេះ ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតគឺ $\boxed{S_n = \frac{n(n^2+23)}{6}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គេឱ្យស៊ីត $1, 2, 5, 10, 17, \ldots$ ។

ក. ចូរកំណត់ តួទី n នៃស៊ីតនេះ ។

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ ។

២. គេឱ្យស៊ីត $(a_n): 3, 5, 8, 12, 17, 23, \ldots$ ។

ក. ចូរកំណត់ a_n ដែលជាតួទី n នៃស៊ីតនេះ ។

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ ។

៣. គេឱ្យស៊ីត $1, 17, 45, 85, 137, 201, \ldots$ ។

ក. ចូរកំណត់ តួទី n នៃស៊ីតនេះ ។

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ ។

៤. គេឱ្យស៊ីត $-1, 6, 19, 38, 63, 94, \ldots$ ។

ក. ចូរកំណត់ តួទី n នៃស៊ីតនេះ ។

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ ។

៤.២ ផលសងតួលំដាប់ទី២

យើងមានស៊ីត $(a_n): a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$។ ស៊ីត $(b_n): b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ ដែល $b_n = a_{n+1} - a_n$ ជាផលសងតួលំដាប់ទី១ នៃស៊ីត(a_n) ។ ផលសងតួលំដាប់ទី២ នៃស៊ីត(a_n) កំណត់ដោយ $(c_n): c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ ដែល $c_n = b_{n+1} - b_n$ ឬ (c_n) ជាផលសងតួលំដាប់ទី១ នៃ (b_n) ។

យើងបាន $\mathbf{b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k}$ នាំឱ្យ $\mathbf{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k}$ ចំពោះ $n \geq 2$។

លំហាត់គំរូទី១: កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $(a_n): 1, 2, 6, 15, 31, 56, \ldots$ ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១ យើងមាន $(a_n): 1, 2, 6, 15, 31, 56, \ldots$ ។

តាង (b_n) ជាផលសងតួលំដាប់ទី១ នៃ(a_n)

យើងបាន $(b_n): 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ នោះ $b_n = n^2$

ចំពោះ $n \geq 2$ យើងបាន

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= 1 + \frac{(n-1)\left[(n-1)+1\right]\left[2(n-1)+1\right]}{6} \\ &= 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \end{aligned}$$

ចំពោះ $n = 1 \Rightarrow a_1 = 1$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{a_n = \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) + 1}$ ។

របៀបទី២ (តាមមផលសងតួលំដាប់ទី២)

យើងមាន $(a_n): 1, 2, 6, 15, 31, 56, \ldots$ ។

តាង (b_n) ជាផលសងតួលំដាប់ទី១ នៃ (a_n)

យើងបាន $(b_n): 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ (មិនមែនជា ស៊ីតនព្វន្ត ឬធរណីមាត្រ)

តាង (c_n) ជាផលសងតួលំដាប់ទី២នៃ (a_n) (ឬជាផលសងតួលំដាប់ទី១នៃ (b_n))

នោះ $(c_n): 3, 5, 7, 9, \ldots$ ជាស៊ីតនព្វន្ត ដែលមានផលសងរួម $d = 2$

យើងបាន $c_n = c_1 + (n-1)d = 3 + (n-1)2 = 2n+1$ ។

ចំពោះ $\forall n \geq 2$ យើងបាន
$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1) \\ &= 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= 1 + 2\frac{n(n-1)}{2} + (n-1) \\ &= n^2 \end{aligned}$$

យើងបាន
$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \end{aligned}$$

ចំពោះ $n = 1 \Rightarrow a_1 = 1$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{a_n = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + 1}$

លំហាត់គំរូទី២ : ក. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $4,18,48,100,180,294,\ldots$ ។

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $4,18,48,100,180,294,\ldots$

តាង $(a_n): 4,18,48,100,180,294,\ldots$

តាង (b_n) ជាផលសងតួលំដាប់ទី១នៃ ស៊ីត(a_n)

$\Rightarrow (b_n): 14,30,52,80,114,\ldots$

តាង (c_n) ជាផលសងតួលំដាប់ទី២ (ផលសងតួលំដាប់ទី១នៃ (b_n))

$\Rightarrow (c_n): 16,22,28,34,\ldots$ ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=6$

$\Rightarrow c_n = c_1 + (n-1)d = 16 + (n-1)6 = 16 + 6n - 6 = 6n + 10$

ចំពោះ $n \geq 2$ យើងបាន

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= 14 + \sum_{k=1}^{n-1}(6k+10) \\ &= 14 + 6\sum_{k=1}^{n-1} k + 10(n-1) \\ &= 14 + 6\frac{n(n-1)}{2} + 10(n-1) \\ &= 3n^2 + 7n + 4 \end{aligned}$$

ចំពោះ $\forall n \geq 2 \Rightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 4 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(3k^2 + 7k + 4\right) = n^3 + 2n^2 + n$

ដូចនេះ **តួទី n នៃស៊ីត** $4,18,48,100,180,294,\ldots$ គឺ $a_n = n^3 + 2n^2 + n$

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(k^3 + 2k^2 + k\right) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)\left(3n^2 + 11n + 10\right)$$

ចំពោះ $n = 1 \Rightarrow S_1 = 4 = a_1$ ពិត ។

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{1}{12}n(n+1)\left(3n^2 + 11n + 10\right)}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម:

ក. $0, 1, 4, 10, 20, 35, \ldots$

ខ. $2, 10, 28, 60, 110, 182, \ldots$

គ. $-1, 2, 15, 44, 95, 174, \ldots$

ឃ. $2006, 1996, 1974, 1934, 1870, 1776, \ldots$

ង. $0, 4, 18, 48, 100, 180, \ldots$

២. ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $1, 5, 14, 30, 55, 91, \ldots$ ។

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

៣. ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $4, 26, 90, 220, 440, 774, \ldots$ ។

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

លំហាត់

១. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $1^2+3^2+5^2+7^2+...$

ខ. $1^4+2^4+3^4+4^4+...$

២. គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $\frac{1}{2\times3}+\frac{2}{3\times5}+\frac{4}{5\times9}+\frac{8}{9\times17}+...+\frac{2^{n-1}}{\left(2^{n-1}+1\right)\left(2^n+1\right)}$

ខ. $\frac{7}{(1\times2)^3}+\frac{19}{(2\times3)^3}+\frac{37}{(3\times4)^3}+...+\frac{3n^2+3n+1}{\left[n(n+1)\right]^3}$

៣. គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+...+(n-1)\cdot n^2$

ខ. $1+3+6+10+...+\frac{n(n+1)}{2}$

៤. គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+n(n+1)$

ខ. $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+...+n(3n+1)$

៥. គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+...+n(n+1)(n+2)$

ខ. $2+7+14+...+(n^2+2n-1)$

៦. គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\frac{3^2}{5\cdot9}+...+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$

ខ. $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2}{3\cdot5\cdot7}+\frac{3}{5\cdot7\cdot9}+...+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$

៧. គណនាផលបូកតួនៃស៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $S_n = \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+4)}$

ខ. $S_n = \frac{7}{1\cdot 8} + \frac{7}{8\cdot 15} + \frac{7}{15\cdot 22} + \dots + \frac{7}{(7n-6)(7n+1)}$

៨. គណនាផលបូកតួនៃស៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{15}{8} + \dots + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$

ខ. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}$

៩. គណនាផលបូកតួនៃស៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2012^2} + \frac{1}{2013^2}}$

ខ. $S_n = \frac{1}{1!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$

១០. គណនាផលបូកតួនៃស៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $S = 1\cdot 2 + 2\cdot 5 + 3\cdot 8 + \dots + 100\cdot 299$

ខ. $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

១១. គណនា៖

ក. $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2 - 1}$

ខ. $S = \sum_{k=1}^{n} \left[k(k+1)(k+2)\right]$។ រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា $4S+1$ ជាការេប្រាកដចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$។

១២. ក. យើងមាន $u_n = 2^n(an^2 + bn + c)$។ ចូរគណនាតម្លៃ a,b,c បើ $u_{n+1} - u_n = n^2 \cdot 2^n$។

ខ. ដោយប្រើ (ក) ចូរគណនា $\sum_{k=1}^{n} 2^k \cdot k^2$

គ. ចូរគណនា $\sum_{k=1}^{n} 2^k \cdot k$

១៣. គេឱ្យ $u_n = \dfrac{\sqrt{2n+2\sqrt{n^2-1}}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}},\ n \in \mathbb{N}$ ។

ចូរគណនា S_n ដែលជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត។

១៤. គណនា $A = \sqrt{2014} + \sqrt{8056} + \sqrt{18126} + ... + \sqrt{20140000}$

$$B = \frac{2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2}{3^2+6^2+9^2+...+(3n)^2}$$

១៥ គេឱ្យ $S_n = 1\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot 8 + 3\cdot 6\cdot 12 + ... + n\cdot 2n\cdot 4n$ និង

$S'_n = 1\cdot 3\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 18 + 3\cdot 9\cdot 27 + ... + n\cdot 3n\cdot 9n$ ។

ចូរគណនា $T_n = \sqrt[3]{\dfrac{S_n}{S'_n}}$

១៦. ចូរកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោមៈ

ក. $0, 0, 2, 6, 12, 20, 30, \dots$

ខ. $0, -2, -2, 0, 4, 10, 18, \dots$

គ. $p, q, p, q, p, q, \dots$

មេរៀនទី ៥ ទំនាក់ទំនងតួនៃស៊ីត

១. កំណត់តួទី n ដោយប្រើស៊ីតជំនួយ

ក. ស៊ីតទម្រង់ $a_1=\alpha$ (ឬ $a_k=\alpha$) និង $a_{n+1}=qa_{n+1}+f(n)$ ដែល $f(n)$ ជាអនុគមន៍ ពហុធាមានដឺក្រេ n ដែល $n\in\mathbb{N}$

របៀបទី១

តាង $b_n=g(n)$ ដែល (b_n) ជាស៊ីតជំនួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងស៊ីត (a_n)

គឺ $(a_n):\ a_{n+1}=qa_n+f(n)$ (1)

នោះ $(b_n):\ b_{n+1}=bq_n+f(n)$ (2)

ជំនួស b_n និង b_{n+1} ក្នុង (2) រួចផ្ទឹមមេគុណត្រូវគ្នានៃ n ដើម្បីកំណត់មេគុណនៃពហុធា $g(n)$

យើងបាន $b_n=g(n)$ រួចទាញរក $b_1=g(1)$ (ឬទាញរក b_k)

ធ្វើផលដក (1) និង (2) យើងបាន $a_{n+1}-b_{n+1}=q(a_n-b_n)$ (3)

តាង $c_n=a_n-b_n \Rightarrow c_{n+1}=a_{n+1}-b_{n+1}$

តាម $(3): c_{n+1}=qc_n \Rightarrow (c_n)$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម q

រក c_1 ដែល $c_1=a_1-b_1$ បន្ទាប់មក កំណត់ c_n ដែល $c_n=c_1\cdot q^{n-1}$

តែ $c_n=a_n-b_n \Rightarrow a_n=c_n+b_n$

របៀបរកស៊ីតជំនួយ b_n

- បើ $q\neq 1$ នោះ តាង $b_n=g(n)$ ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូច $f(n)$
- បើ $q=1$ នោះ តាង $b_n=n\cdot g(n)$ ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូច $f(n)$

របៀបទី២

- បើ $q\neq 1$ នោះតាង $b_n = a_n + g(n)$ ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូច $f(n)$
- បើ $q=1$ នោះ តាង $b_n = a_n + n\cdot g(n)$ ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូច $f(n)$ ។

របៀបទី៣: យើងមាន $a_{n+1} = qa_n + f(n) \quad (*)$

☞ ចម្លើយទូទៅនៃ $(*)$ កំណត់ដោយ $a_n = a_n' + a_n''$ ដែល ៖

- a_n' ជាចម្លើយទូទៅនៃស្វ៊ីត $a_{n+1} = qa_n$ គឺ $a_{n+1}' = qa_n'$
  $\Rightarrow a_n' = k\cdot q^{n-1}$ ដែល k កំណត់រកតាម a_1 ។
- a_n'' ជាចម្លើយពិសេសនៃ $(*)$ ដែល $\begin{cases} a_n'' = g(n) & \text{បើ } q\neq 1 \\ a_n'' = n\cdot g(n) & \text{បើ } q=1 \end{cases}$
  ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូច $f(n)$ ។

របៀបទី៤: យើងមាន $a_{n+1} = qa_n + f(n) \quad (*)$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃ $(*)$ នឹង q^{n+1} យើងបាន $\dfrac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \dfrac{a_n}{q^n} + \dfrac{f(n)}{q^{n+1}} \quad (**)$

តាង $b_n = \dfrac{a_n}{q^n} \Leftrightarrow a_n = b_n\cdot q^n$

តាម $(**)$ យើងបាន $b_{n+1} = b_n + \dfrac{f(n)}{q^{n+1}}$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} - b_n = \frac{f(n)}{q^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{n+1} - b_n\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(n)}{q^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow\ b_n - b_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(n)}{q^{n+1}}$$

$$\Rightarrow\ b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(n)}{q^{n+1}}$$

ឧទាហរណ៍១ : គេឱ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 1$ និង $a_{n+1} = 2a_n + 3$។
កំណត់តួទី n ។

ចម្លើយ ៖ $a_n = 2^{n+1} - 3$

ឧទាហរណ៍២ : កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 5$ និង
$a_n = 2a_{n-1} - n$។

ចម្លើយ ៖ $a_n = 2^n + n + 2$

ឧទាហរណ៍៣: គេឱ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2n \end{cases}, n \in \mathbb{N}$ ។

កំណត់ a_n ដែលជាតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ ។

ចម្លើយ ៖ $a_n = \frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} + n + \frac{1}{2}\ ,\ n \in \mathbb{N}$

ឧទាហរណ៍៤: រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយ :

$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + n^2 + 2n + 3 \end{cases}$ ។

ចម្លើយ $a_n = 7 \cdot 2^n - n^2 - 4n - 8\ , n \in \mathbb{N}$

ឧទាហរណ៍៥: រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយ $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n \end{cases}$

ចម្លើយ ៖ $a_n = n^2 - n + 2$

លំហាត់

១. កំណត់តួទូទៅនៃស៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម:

ក. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n + 4 \end{cases}$ ខ $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{4} \end{cases}$

គ. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 5a_n + 6 \end{cases}$ ឃ. $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = 4a_n + 15 \end{cases}$

ង. $\begin{cases} a_1 = -\frac{8}{9} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{2}{3} \end{cases}$ ច. $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + 7 \end{cases}$

ឆ. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 7a_n + 36 \end{cases}$ ជ. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n + 1 \end{cases}$

ឈ. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n + 4 \end{cases}$ ញ. $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = 3a_n + 12 \end{cases}$

២. កំណត់តួទូទៅនៃស៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម:

ក. $\begin{cases} a_5 = 33 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} a_5 = 87 \\ a_{n+1} = 3a_n + 12 \end{cases}$

គ. $\begin{cases} a_4 = 66 \\ a_{n+!} = 3a_n + 3 \end{cases}$ ឃ. $\begin{cases} a_3 = 74 \\ a_{n+1} = 5a_n + 4 \end{cases}$

ង. $\begin{cases} a_2 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 5 \end{cases}$ ច. $\begin{cases} a_3 = 11 \\ a_{n+1} = 5a_n + 3 \end{cases}$

ឆ. $\begin{cases} a_3 = -5 \\ a_{n+1} = 2a_n + \frac{7}{3} \end{cases}$ ជ. $\begin{cases} a_2 = -3 \\ a_{n+1} = 2a_n - 5 \end{cases}$

ឈ. $\begin{cases} a_2 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n + 2 \end{cases}$ ញ. $\begin{cases} a_5 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1 \end{cases}$

៣. កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

ក. $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2n + 1 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n + n - 2 \end{cases}$

គ. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 2 \end{cases}$ ឃ. $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = 5a_n + 20n - 5 \end{cases}$

ង. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - \frac{3}{4}n - 2 \end{cases}$ ច. $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \end{cases}$

ឆ. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n + 2n + 5 \end{cases}$ ជ. $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = 4a_n + 30n - 5 \end{cases}$

ឈ. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3n - 3 \end{cases}$ ញ. $\begin{cases} a_1 = 9 \\ a_{n+1} = 2a_n + n - 1 \end{cases}$

ដ. $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 2a_n - n \end{cases}$ ឋ. $\begin{cases} a_2 = 6 \\ a_{n+1} = 2a_n - n + 1 \end{cases}$

ឌ. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2n + 3 \end{cases}$ ឍ. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2n - 3 \end{cases}$

ណ. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n - 2n + 3 \end{cases}$ ត. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 3 \end{cases}$

ថ. $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = 3a_n + 2n + 3 \end{cases}$ ទ. $\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2n - 5 \end{cases}$

ធ. $\begin{cases} a_2 = 8 \\ a_{n+1} = a_n + 4n + 3 \end{cases}$ ន. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 6n + 4 \end{cases}$

ខ. ស៊ីតទម្រង់ $a_1=\alpha$ (ឬ $a_k=\alpha$) និង $a_{n+1}=qa_n+f(n)\cdot r^n$ ដែល $f(n)$ ជាពហុធាដឺក្រេ n និង α , p , q ជាចំនួនពិតថេរ

របៀបទី១

ក. ករណី $p\neq q$

តាង $b_n=g(n)\cdot r^n$ ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូច $f(n)$
ដែល (b_n) ជាស៊ីតជំនួយផ្សេងផ្ទាត់នឹងស៊ីត (a_n)

គឺ $(a_n):\ a_{n+1}=qa_n+f(n)\cdot r^n$ (1)

នោះ $(b_n):\ b_{n+1}=qb_n+f(n)\cdot r^n$ (2)

ជំនួស b_n និង b_{n+1} ក្នុង (2) រួចផ្ទឹមមេគុណត្រូវគ្នានៃ n ដើម្បីកំណត់មេគុណនៃពហុធា $g(n)$

យើងបាន $b_n=g(n)$ រួចទាញរក $b_1=g(1)$

ធ្វើផលដក (1) និង (2) យើងបាន $a_{n+1}-b_{n+1}=q(a_n-b_n)$ (3)

តាង $c_n=a_n-b_n \ \Rightarrow\ c_{n+1}=a_{n+1}-b_{n+1}$

តាម $(3): c_{n+1}=qc_n \Rightarrow (c_n)$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម q

រក c_1 ដែល $c_1=a_1-b_1$ បន្ទាប់មក កំណត់ c_n ដែល $c_n=c_1\cdot q^{n-1}$

តែ $c_n=a_n-b_n \ \Rightarrow\ a_n=c_n+b_n$

ខ. ករណី $p=q$

តាង $b_n=n\cdot g(n)\cdot r^n$ ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូច $f(n)$
រួចបកស្រាយតាមរបៀបដូចករណី $p\neq r$ ដែរ

របៀបទី២

- បើ $q \neq 1$ នោះ តាង $b_n = a_n + g(n)\cdot r^n$ ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូច $f(n)$
- បើ $q \neq 1$ នោះតាង $b_n = a_n + n\cdot g(n)\cdot r^n$ ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូច $f(n)$

របៀបទី៣ : យើងមាន $a_{n+1} = qa_n + f(n)\cdot r^n \quad (*)$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃ $(*)$ នឹង q^{n+1} យើងបាន

$$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{a_n}{q^n} + f(n)\cdot\frac{r^n}{q^{n+1}} \quad (**)$$

តាង $b_n = \dfrac{a_n}{q^n} \Leftrightarrow a_n = b_n \cdot q^n$

តាម $(**)$ យើងបាន

$$b_{n+1} = b_n + f(n)\cdot\frac{r^n}{q^{n+1}} \Leftrightarrow b_{n+1} - b_n = \frac{f(n)}{q}\cdot\left(\frac{r}{q}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{n+1} - b_n\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(n)}{q}\cdot\left(\frac{r}{q}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow b_n - b_1 = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(n)}{q}\cdot\left(\frac{r}{q}\right)^n$$

$$\Rightarrow b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(n)}{q}\cdot\left(\frac{r}{q}\right)^n$$

របៀបទូទៅ

យើងមាន $a_{n+1} = qa_n + f(n)\cdot r^n \quad (*)$

ចម្លើយទូទៅនៃ $(*)$ កំណត់ដោយ $a_n = a'_n + a''_n$ ដែល ៖

- a'_n ជាចម្លើយទូទៅនៃស្វ៊ីត $a_{n+1} = qa_n$ គឺ $a'_{n+1} = qa'_n$

  $\Rightarrow \ a'_n = k\cdot q^{n-1}$

- a''_n ជាចម្លើយពិសេសនៃ $(*)$ ដែល $\begin{cases} a''_n = g(n)\cdot r^n & \text{បើ } q \neq r \\ a''_n = n\cdot g(n)\cdot r^n & \text{បើ } q = r \end{cases}$

  ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូច $f(n)$

របៀបកំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយ $a_1 = \alpha$ និង

$a_{n+1} = qa_n + f_1(n) + f_2(n) + \ldots + f_k(n)$

☞ **ចម្លើយទូទៅគឺ** $a_n = a'_n + g_1(n) + g_2(n) + g_3(n) + \ldots + g_k(n)$ **ដែល ៖**

- a'_n ជាចម្លើយទូទៅនៃស្វ៊ីត $a_{n+1} = qa_n$ គឺ $a'_{n+1} = qa'_n$

  $\Rightarrow a'_n = \beta\cdot q^{n-1}$ ដែល β កំណត់តាម a_1

- $g_1(n)$ ជាចម្លើយពិសេសត្រូវនឹង $a_{n+1} = qa_n + f_1(n)$

  $\Rightarrow \ g_1(n+1) = qg_1(n) + f(n)$

- $g_2(n)$ ជាចម្លើយពិសេសត្រូវនឹង $a_{n+1} = qa_n + f_2(n)$

  $\Rightarrow \ g_2(n+1) = qg_2(n) + f(n)$

- $g_3(n)$ ជាចម្លើយពិសេសត្រូវនឹង $a_{n+1} = qa_n + f_3(n)$

  $\Rightarrow \ g_3(n+1) = qg_3(n) + f(n)$

  $\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

- $g_k(n)$ ជាចម្លើយពិសេសត្រូវនឹង $a_{n+1} = qa_n + f_k(n)$

$\Rightarrow \ g_k(n+1) = qg_k(n) + f(n)$

លំហាត់

១. រកតួទី n នៃស្ទីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងដូចខាងក្រោម ៖

ក. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n + 2^n \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3\cdot 2^n \end{cases}$

គ. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + n\cdot 3^n \end{cases}$ ឃ. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n + (n+4)\cdot 3^n \end{cases}$

ង. $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 2a_n + (n+1)\cdot 2^n \end{cases}$ ច. $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = 5a_n - 3^n \end{cases}$

ឆ. $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + 2n\cdot 3^n \end{cases}$ ជ. $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{n+1} = 2a_n + 6\cdot 2^n \end{cases}$

ឈ. $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} - 2a_n = n + 3^n \end{cases}$ ញ. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + n^2 + 3\cdot 2^n \end{cases}$

ដ. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n - 2n - 1 + 2^{-n} \end{cases}$

ឋ. $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n - n + n^2 + (1-n)\cdot 2^n \end{cases}$

ឌ. $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} - 2a_n = (n^2+1)\cdot 2^n \end{cases}$

ឍ. $\begin{cases} a_0 = 17 \\ a_{n+1} = 2a_n - n^2 + 2n + 1 + 6\cdot 2^n \end{cases}$

២. ទំនាក់ទំនងរវាង a_n និង S_n

យើងមាន $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \quad (1)$

និង $S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \quad (2)$

យក $(1)-(2)$ យើងបាន $S_n - S_{n-1} = a_n$ ចំពោះ $n \geq 2$

ដូចនេះ ទំនាក់ទំនងរវាង a_n និង S_n **គឺ** $\boxed{a_n = S_n - S_{n-1}\,,\, S_1 = a_1}$

លំហាត់

១. S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្ទីត (a_n)។ ប្រសិនបើ S_n បំពេញលក្ខខណ្ឌ:

$$S_n = 4 - a_n - \frac{1}{2^{n-2}}\ ,\ (n = 1, 2, 3, ...)$$ ។

ក. រកទំនាក់ទំនងកំណើនរវាង a_{n+1} និង a_n។

ខ. រកតួទី n នៃស្ទីត (a_n)។

២. ឧបមាថាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $2a_n - S_n = 3^n$ $(n = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,......)$។ ចូររកតួទូទៅ a_n។

៣. យក $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ។ ប្រសិនបើ S_n បំពេញលក្ខខណ្ឌ $S_n + n = 3^n$ ចំពោះ $n = 1, 2, 3, ...$។ ចូររកតួទូទៅនៃស្ទីត (a_n) ។

៤. ឧបមាថាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ :

$$S_1 = 1\,,\, S_{n+1} - 3S_n = 2^{n+1} - 1,\ (n = 1, 2, 3, ...)$$ ។

ចូររកតួទៅនៃស្ទីត (a_n) ។

៥. ឧបមាថា S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្ទីត (a_n) ដែល $a_1 = 1$។

ប្រសិនបើ S_n និង a_n បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_n = \dfrac{2S_n^2}{2S_n - 1}\,,(n \geq 2)$ ។

រកតួទី n នៃស្ទីត (a_n) ។

៣. របៀបកំណត់តួទី n នៃស៊ីតដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនង:

$$\begin{cases} a_1=\alpha, a_2=\beta \\ a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0 \end{cases}$$ **ដែល** α,β,p,q **ជាចំនួនពិតថេរ** $(n\in\mathbb{N})$

របៀបដោះស្រាយ

- សមីការសម្គាល់នៃ $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ (*) គឺ $x^2+px+q=0$ មាន $\Delta=p^2-4q$

❶ បើ $\Delta>0$ នោះសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា $(x_1\neq x_2)$ នោះតួទី n នៃ (*) កំណត់ដោយ $a_n=Ax_1^n+Bx_2^n$ ដែល A និង B កំណត់តាម a_1 និង a_2 ។

❷ បើ $\Delta=0$ នោះសមីការមានឫសពីរស្មើគ្នា (ឫសឌុប $x_1=x_2=x_0$) នោះតួទី n នៃ (*) កំណត់ដោយ $a_n=(An+B)x_0^n$ ដែល A និង B កំណត់តាម a_1 និង a_2 ។

❸ បើ $\Delta<0$ នោះសមីការមាន ឫសជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ $x_{1,2}=a\pm bi$ នោះតួទី n នៃ (*) កំណត់ដោយ $a_n=r^n\left(A\cos n\theta+B\sin n\theta\right)$ ដែល:

- $r=\sqrt{a^2+b^2}$
- $\left.\begin{aligned}\cos\theta=\frac{a}{r}\\ \sin\theta=\frac{b}{r}\end{aligned}\right|\Rightarrow\theta=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

ហើយដែល A និង B កំណត់តាម a_1 និង a_2 ។

លំហាត់គំរូទី១ : កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនង:

$a_1 = 0, a_2 = 3$ និង $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n \Leftrightarrow a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$

សមីការសម្គាល់ $x^2 - 4x + 3 = 0$

ដោយ $a+b+c = 1-4+3 = 0$ នោះសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា គឺ

$x_1 = 1, x_2 = \dfrac{c}{a} = 3$

នោះតួទី n នៃស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $a_n = A\cdot 1^n + B\cdot 3^n = A + B\cdot 3^n$

ដោយ $a_1 = 0, a_2 = 3$ គេបាន: $\begin{cases} A+3B=0 \\ A+9B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{3}{2} \\ B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $\boxed{a_n = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot 3^n = \dfrac{3^n - 3}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$

លំហាត់គំរូទី២ : កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនង:

$a_1 = -3, a_2 = -36$ និង $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n \Leftrightarrow a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$

សមីការសម្គាល់ $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$\Delta' = 9 - 9 = 0$$

នោះសមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 3$

នោះតួទី n នៃស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $a_n = (An + B)\cdot 3^n$

ដោយ $a_1 = -3, a_2 = -36$

យើងបាន $\begin{cases}3A+3B=-3\\18A+9B=-36\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-3\\B=2\end{cases}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស៊ីតគឺ $\boxed{a_n=(-3n+2)\cdot 3^n}$, $n\in\mathbb{N}$

លំហាត់គំរូទី៣ : កំណត់តួទី n នៃស៊ីតដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនង :

$a_1=3, a_2=4$ និង $a_{n+2}+2a_{n+1}+2a_n=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

សមីការសម្គាល់ $x^2+2x+2=0$

$$\Delta'=1-2=-1=i^2$$

$$\sqrt{\Delta'}=i$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=-1\pm i$$

$$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta&=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right|\Rightarrow\ \theta=\frac{3\pi}{4}$$

នោះចម្លើយទូទៅនៃ (a_n) កំណត់ដោយ

$$a_n=r^n\left(A\cos n\theta+B\sin n\theta\right)=\sqrt{2}^n\left(A\cos\frac{3\pi}{4}n+\sin\frac{3\pi}{4}n\right)$$

ដោយ $a_1=3, a_2=4$ យើងបាន

$$\begin{cases}\sqrt{2}\left(A\cos\frac{3\pi}{4}+B\sin\frac{3\pi}{4}\right)=3\\ \sqrt{2}^2\left(A\cos\frac{3\pi}{2}+B\sin\frac{3\pi}{2}\right)=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-5\\B=-2\end{cases}$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស៊ីតគឺ $\boxed{a_n=\sqrt{2}^n\left(-5\cos\frac{3\pi}{4}n-2\sin\frac{3\pi}{4}n\right)}$

លំហាត់

១. ចូរកំណត់តួទី n នៃស៊ីតដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងខាងក្រោម:

ក. $\begin{cases} a_1 = 6\ ,\ a_2 = 16 \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} a_1 = 1\ ,\ a_2 = 0 \\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \end{cases}$

គ. $\begin{cases} a_1 = 1\ ,\ a_1 = 2\sqrt{2} \\ a_{n+2} = 2\sqrt{2}a_{n+1} - 4a_n \end{cases}$ ឃ. $\begin{cases} a_1 = 1\ ,\ a_2 = 13 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \end{cases}$

ង. $\begin{cases} a_1 = \dfrac{3-2\sqrt{3}}{2}\ ,\ a_2 = \dfrac{3-6\sqrt{3}}{2} \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} + 3a_n = 0 \end{cases}$ ច. $\begin{cases} a_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ a_2 = \dfrac{1}{2} \\ a_{n+2} = \sqrt{3}a_{n+1} - a_n \end{cases}$

២. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម:

ក. $\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 2 \\ a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} a_0 = 2\ , a_1 = 3 \\ 2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \end{cases}$

គ. $\begin{cases} a_0 = 0\ , a_1 = 1 \\ a_{n+2} = 7a_{n+1} + 8a_n \end{cases}$ ឃ. $\begin{cases} a_0 = 2\ , a_1 = 3 \\ a_{n+2} = \dfrac{1}{3}\left(4a_{n+1} - a_n\right) \end{cases}$

ង. $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \end{cases}$ ច. $\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 2 \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \end{cases}$

ឆ. $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = \dfrac{3}{2}a_{n+1} - \dfrac{1}{2}a_n \end{cases}$ ជ. $\begin{cases} a_0 = 2\ , a_1 = 5 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n \end{cases}$

ឈ. $\begin{cases} a_0 = 0\ , a_1 = 1 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \end{cases}$ ញ. $\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = -3 \\ a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n \end{cases}$

៣. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម:

ក. $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2 \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 9a_n \end{cases}$

គ. $\begin{cases} a_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, a_2 = \dfrac{1}{2} \\ a_{n+2} = \sqrt{3}a_{n+1} - a_n \end{cases}$ ឃ. $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2\sqrt{3} \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n \end{cases}$

ង. $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2 \\ a_{n+2} = 4\sqrt{3}a_{n+1} - 16a_n \end{cases}$ ច. $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$